# Zur Polarentheorie des Flächenbündels 2. Ordnung

## mit besonderer Berücksichtigung des Flächenbündels der Raumkurve 3. Ordnung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Wolfgang Baier
aus Stralsund.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Druck der Königlichen Regierungsbuchdruckerei in Stralsund.

1914

Referent:
Geheimer Hofrat Professor Dr. Staude,
Kaiserlich Russischer Staatsrat a. D.

Meinem lieben Vater!

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553625_0121

# Einleitung.

In der analytischen Geometrie der kubischen Kegelschnitte von Staude findet sich eine in den drei Verhältnissen $x_1 : x_4$, $x_2 : x_4$, $x_3 : x_4$ symmetrische Darstellung der kubischen Raumkurven abgeleitet[1]), die sich an eine beliebige Ebene des Raumes anlehnt und, wenn diese Ebene die unendlich ferne Ebene wird, eine in den drei schiefwinkligen Koordinaten x y z symmetrische Darstellung der kubischen Hyperbel liefert[2]). In der vorliegenden Arbeit wird diese neue Darstellungsweise der kubischen Raumkurve auf die Untersuchung des mit der Raumkurve verbundenen speziellen Bündels von Flächen 2. O. angewendet.

Zu diesem Zwecke wird im 1. Abschnitt zunächst eine analytische Ableitung der Hauptsätze über das allgemeine Flächenbündel vorausgeschickt und besonders auf die Polarentheorie und den Komplex der Erzeugenden der Flächen des Bündels eingegangen.

Der 2. Abschnitt ist dann dem Flächenbündel der kubischen Raumkurve gewidmet. Der Komplex der Erzeugenden, jetzt zugleich der Treffgeraden der Raumkurve, gewinnt jetzt gegenüber der auf das Schmiegungstetraeder bezogenen Gleichung von Clebsch-Lindemann[3]) die symmetrische Darstellung art. **14.** Formel (35). Ebenso erscheint die Tangentenfläche gegenüber der bisherigen Darstellung in symmetrischer Form. Besonders natürlich erscheint der Gebrauch der auf eine feste Ebene bezogenen neuen Darstellung der Raumkurve 3. O. für die dieser

[1]) Staude, III, § 34. [2]) Staude, III, § 20. [3]) Geom. des Raumes S. 244.

Ebene als Polfläche entsprechende Fläche 3. O. art. 4 Formel (11), welche eine äusserst einfache Gleichungsform erhält, während sich für die Untersuchung der kubischen Polfläche einer Schmiegungsebene die Darstellung im Schmiegungstetraeder als praktisch erweist. Für die allgemeine Gerade geschieht die Untersuchung ebenfalls in Koordinaten eines Schmiegungstetraeders, weil sich in dieser Form der Übergang zu speziellen Lagen der Geraden einfach gestaltet. Die Geraden in spezieller Lage werden von art. 28. ab im Haupttetraeder behandelt, weil die Einfachheit der auftretenden Gleichungen die Untersuchung der kubischen Polkurven erleichtert. Da diese Kurven betrachtet werden als der Schnitt von Polarhyperboloiden der Geraden bezüglich von Büscheln, so werden hier, wie im 1. Abschnitt, einige Sätze aus der Polarentheorie des Flächenbüschels 2. O. eingeflochten.

Der 3. Abschnitt bezieht sich auf die kubische Hyperbel, bei der die ausgezeichnete Ebene für die analytische Darstellung die unendlich ferne Ebene ist. Da sich mit Änderung der Koordinatenbezeichnung alle Sätze und Formeln des 2. Abschnitts auf die kubische Hyperbel übertragen lassen, so ist hier von einer nochmaligen Ausführung aller Sätze abgesehen, und nur auf die kubische Polfläche der unendlich fernen Ebene näher eingegangen.

## Abschnitt I.

# Polarentheorie im allgemeinen Flächenbündel zweiter Ordnung.

**1. Das allgemeine Flächenbündel.** Die Gleichung des Bündels sei:

$$(1) \qquad f + \lambda g + \mu h = 0.$$

Darin sind $\lambda$ und $\mu$ willkürliche Parameter und f, g und h Abkürzungen für die drei Grundflächen des Bündels:

$$(2) \quad \begin{cases} f = \sum_1^4{}_k \sum_4^4{}_l \, a_{kl} \, x_k \, x_l = 0 \\ g = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l \, b_{kl} \, x_k \, x_l = 0 \\ h = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l \, c_{kl} \, x_k \, x_l = 0 \end{cases}$$

Diese drei Flächen schneiden sich i. A. in acht Punkten. Man nennt das durch sie bestimmte Bündel oder die zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Flächen, die durch acht Punkte gehen, ein „allgemeines Bündel zweiter Ordnung“ [1]).

**2. Polarebenen eines Punktes.** Die Polarebene eines Punktes $P_0$ mit den Koordinaten $x_1^0\ x_2^0\ x_3^0\ x_4^0$ in bezug auf die laufende Fläche (1) des Bündels ist:

$$(3) \qquad (f_1^0 + \lambda g_1^0 + \mu h_1^0)\, x_1 + (f_2^0 + \lambda g_2^0 + \mu h_2^0)\, x_2 + (f_3^0 + \lambda g_3^0 + \mu h_3^0)\, x_3 + (f_4^0 + \lambda g_4^0 + \mu h_4^0)\, x_4 = 0$$

worin $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ laufende Koordinaten und $f_i^0\ g_i^0\ h_i^0$ die

[1]) Enz. d. math. Wiss. III, 2,2 gibt Literatur über den Begriff. Ausserdem bei Reye, G. d. L. III S. 134; Hesse, G. d. R. S. 124. Salmon-Fiedler, G. d. R. I. S. 231.

Ausdrücke sind, die man erhält, wenn man f, g, h partiell nach $x_i$ differenziert und statt der $x_i$ die Koordinaten $x_i^0$ von $P_0$ einsetzt.

Die Gleichung (3) lautet anders geordnet:

(4) $\{ f_1^0 x_1 + f_2^0 x_2 + f_3^0 x_3 + f_4^0 x_4 \} + \lambda \{ g_1 x_1 + g_2^0 x_2 + g_3^0 x_3 + g_4^0 x_4 \} + \mu \{ h_1^0 x_1 + h_2^0 x_2 + h_3^0 x_3 + h_4^0 x_4 \} = 0$

oder mit den Abkürzungen:

$$(5) \quad \begin{cases} X_0 = f_1^0 x_1 + f_2^0 x_2 + f_3^0 x_3 + f_4^0 x_4 \\ Y_0 = g_1^0 x_1 + g_2^0 x_2 + g_3^0 x_3 + g_4^0 x_4 \\ Z_0 = h_1^0 x_1 + h_2^0 x_2 + h_3^0 x_3 + h_4^0 x_4 \end{cases}$$

$$(6) \quad X_0 + \lambda Y_0 + \mu Z_0 = 0 \text{ [1]}.$$

Die Polarebenen eines Punktes $x^0_k$ in bezug auf die $\infty^2$ Flächen des Bündels gehen alle durch einen Punkt, bilden also ein Ebenenbündel[2]).

**3. Konjugierte Punkte.** Dem Punkte $P_0$ ist dadurch ein Punkt $P_1$ zugeordnet, welcher sein konjugierter[3]) Punkt heisst. Der dem Punkte $P_0$ konjugierte Punkt ist der Schnittpunkt der drei Ebenen (5):

$$(7) \quad X_0 = 0, \quad Y_0 = 0, \quad Z_0 = 0.$$

Die Gleichung des Schnittpunktes lautet mit Unterdrückung des Index „0“ (cf. Staude I, § 47 (15′)) in laufenden Ebenenkoordinaten:

$$(8) \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus ergeben sich die Koordinaten des Schnittpunktes als die Unterdeterminanten der Glieder der ersten Zeile:

$$(9) \quad x_1^{(1)} : x_2^{(1)} : x_3^{(1)} : x_4^{(1)} = \begin{vmatrix} f_2 & f_3 & f_4 \\ g_2 & g_3 & g_4 \\ h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} f_1 & f_3 & f_4 \\ g_1 & g_3 & g_4 \\ h_1 & h_3 & h_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_4 \\ g_1 & g_2 & g_4 \\ h_1 & h_2 & h_4 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix}$$

[1]) cf. Staude l. § 53, 1. [2]) Salmon-Fiedler, G. d. R. l. S. 234. [3]) Enz. d. math. Wiss. III, 2,2 Nr. 130; Lamé, Examen S. 38; Plücker, Werke I. S. 88; Steiner, Werke I. S. 350; Reye, G. d. L. III. S. 134; Schröter, Fl. 2. O. S. 708. Sturm, Fl. 3. O. S. 29; Sturm, Geom. Verw. III S. 479.

**4. Involutorische Eigenschaft konjugierter Punkte.** Da bei jeder einzelnen Fläche 2. O., wenn ein Punkt $P_1$ in der Polarebene eines Punktes $P_0$ liegt, die Polarebene von $P_1$ wieder durch $P_0$ geht[1]), so ist auch im Bündel die Beziehung zwischen einem Punkte $P_0$ und seinem konjugierten Punkte $P_1$ reziprok:

Wenn $P_1$ der konjugierte Punkt von $P_0$ ist, so ist auch $P_0$ der konjugierte Punkt von $P_1$ [2]).

**5. Konjugierte Punkte der Punkte einer Geraden.** Der laufende Punkt einer durch die Punkte $P_1 (x_i{}^{(1)})$ und $P_2 (x_i{}^{(2)})$ gegebenen Geraden hat die Koordinaten:

$$x_i{}^{(1)} + \tau\, x_i{}^{(2)} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Er hat nach Gleichung (7) zum konjugierten Punkt den Schnittpunkt der drei Ebenen:

$$(10)\quad X_1 + \tau X_2 = 0,\ Y_1 + \tau Y_2 = 0,\ Z_1 + \tau Z_2 = 0.$$

Da $\tau$ ein veränderlicher Parameter ist, stellen die Gleichungen (10) drei Ebenenbüschel dar, deren entsprechende Ebenen sich in den Punkten einer Raumkurve 3. O. schneiden[3]) (vgl. Staude III, § 36, 3.).

Die konjugierten Punkte der einzelnen Punkte einer Geraden $P_1 P_2$ bilden die Raumkurve 3. O. (10).

Löst man die Gleichungen (10) nach $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ auf, so resultiert die Parameterdarstellung der Raumkurve.

**6. Reziproke Polaren einer Geraden.** Die Gleichungen der reziproken Polaren der Geraden $P_1 P_2$ in bezug auf die laufende Fläche des Bündels (1) sind mit den Abkürzungen (5):

$$(11)\quad \begin{cases} X_1 + \lambda Y_1 + \mu Z_1 = 0, \\ X_2 + \lambda Y_2 + \mu Z_2 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen stellen zwei Ebenenbündel dar, die sich in den Sehnen der Raumkurve (10) schneiden.[4]) (vgl. Staude III, § 36, 7.)

Die reziproken Polaren einer Geraden in bezug auf das allgemeine Bündel von Flächen 2. O. bilden die Sehnenkongruenz der Raumkurve 3. O., die der Ort der konjugierten Punkte aller Punkte der Geraden ist.

---

[1]) cf. Staude, II § 68, 13. [2]) Sturm, Fl. 3. O. S. 29. [3]) Enz. d. math. Wiss. III 2,2 Nr. 130; Sturm, F. 3. O. S. 32; Reye, G. d. L. III S. 134; Sturm, Geom. Verw. IV S. 407 u. III S. 412 u. 479; Nöther, Math. Ann. 3 S. 555. [4]) Enz. d. math Wiss. III 2,2 Nr. 71; Reye, G. d. L. III S. 134; Schröter, F. 2. O. S. 709.

**7. Konjugierte Punkte der Punkte einer Ebene.** Der laufende Punkt einer durch die drei Punkte $P_1$ $(x_i^{(1)})$ $P_2$ $(x_i^{(2)})$ und $P_3$ $(x_i^{(3)})$ gegebenen Ebene hat die Koordinaten:

$$x_i^{(1)} + \tau x_i^{(2)} + \sigma x_i^{(3)}, \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Sein konjugierter Punkt ist nach Gleichung (7) der Schnitt der drei Ebenen:

$$(12) \quad \left| \begin{array}{l} X_1 + \tau X_2 + \sigma X_3 = 0 \\ Y_1 + \tau Y_2 + \sigma Y_3 = 0 \\ Z_1 + \tau Z_2 + \sigma Z_3 = 0 \end{array} \right.$$

Diese drei projektiven Ebenenbündel schneiden sich in den Punkten einer Fläche 3. O.[1]).

Die Gleichung dieser Fläche kann man erhalten, wenn man annimmt, dass der konjugierte Punkt $P_1$ von P in Gleichung (9) in einer Ebene mit den Koordinaten $u_i$ liegt:

$$u_1 x_1^{(1)} + u_2 x_2^{(1)} + u_3 x_3^{(1)} + u_4 x_4^{(1)} = 0.$$

Führt man die Grössen (9) hier ein, so resultiert als Gleichung der Fläche 3. O. in laufenden Koordinaten $x_i$:

$$(13) \quad \left| \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{array} \right| = 0$$

Die konjugierten Punkte der einzelnen Punkte einer Ebene $u_i$ bilden die Fläche 3. O.[2]) (13).

**8. Ort der Pole einer Ebene.** Die Polarebene eines Punktes P in bezug auf die laufende Bündelfläche (1) hat die Koordinaten (vgl. Staude II § 68,**12**):

$$(14) \quad \left| \begin{array}{l} \rho u_1 = f_1 + \lambda g_1 + \mu h_1, \\ \rho u_2 = f_2 + \lambda g_2 + \mu h_2, \\ \rho u_3 = f_3 + \lambda g_3 + \mu h_3, \\ \rho u_4 = f_4 + \lambda g_4 + \mu h_4. \end{array} \right.$$

Dies sind die Beziehungen zwischen einem Pol $P(x_i)$ und seiner Polarebene $E(u_i)$ in bezug auf die Fläche $(\lambda, \mu)$ des Bündels. Unabhängig von den Parametern besteht die Beziehung (13), die bei Elimination von $(\rho, 1, \lambda, \mu)$ entsteht.

---

[1]) Sturm, Fl. 3. O. S. 28. [2]) Enz. d. math. Wiss. III 2, 2 Nr. 130; Nöther, Math. Ann. 3 S. 552; Sturm, Geom. Verw. III S. 412 u. 479; Hesse, Werke S. 346; Steiner, Werke II S. 653 = J. f. Math. 53 (1857) S. 134; Sturm, Fl. 3. O. S. 28; Geiser, J. f. Math. 69 (1868) S. 197. Schröter, Th. d. Fl. 2. O. S. 710. Nachweis der Geraden auf der F. 3. O.: Schröter ebenda; Geiser, J. f. Math. 69 S. 206; Geiser, Viert. Zür. Nat. Ges. 1865.

Der Ort aller Pole einer Ebene bezüglich der $\infty^2$ Bündelflächen ist eine Fläche 3. O., die zugleich der Ort der konjugierten Punkte aller Punkte der Ebene ist[1]).

Daraus folgt: Die Mittelpunkte der $\infty^2$ Flächen des Bündels liegen auf einer Fläche 3. O., die der Ort der konjugierten Punkte aller Punkte der unendlich fernen Ebene ist[2]).

Da somit einer Ebene stets eine Fläche 3. O. zugeordnet ist, so nennt man die Fläche 3. O. die kubische Polfläche[3]) der Ebene bezüglich des Bündels. Ebenso ist die Raumkurve 3. O. (10) die kubische Polkurve[3]) einer Geraden.

**9. Sich selbst konjugierte Punkte.** Der Punkt $P_0$ fällt mit seinem konjugierten Punkte $P_1$ zusammen, wenn er die Gleichungen (5) befriedigt:

$$f_1'' x_1'' + f_2'' x_2'' + f_3'' x_3'' + f_1^0 x_4'' - f^0 - 0.$$
$$g_1^0 x_1^0 + g_2^0 x_2^0 + g_3^0 x_3^0 + g_4^0 x_4^0 = g^0 = 0,$$
$$h_1^0 x_1^0 + h_2^0 x_2^0 + h_3^0 x_3^0 + h_4^0 x_4^0 = h^0 = 0,$$

d. h.: Ein Punkt ist immer nur dann sich selbst konjugiert, wenn er gemeinsamer Punkt der drei Grundflächen (2) ist.

Im allgemeinen Bündel sind also nur die acht Grundpunkte sich selbst konjugiert[4]).

**10. Verbindungslinie von zwei konjungierten Punkten.** Durch zwei Punkte, die nicht auf der Grundkurve 4. O. eines Büschels im Bündel liegen, wird eine Fläche des Bündels bestimmt. Wenn diese beiden Punkte zwei konjugierte Punkte $P_0$ und $P_1$ sind, so sind sie wie bezüglich aller Bündelflächen, so im besonderen bezüglich der durch sie beide gehenden Bündelfläche harmonische Pole von einander. Daher muss die Tangentialebene dieser Fläche in jedem von ihnen durch den anderen gehen (vgl. Staude II § 67. (27)). Die Schnittlinie ihrer Tangentialebenen deckt sich also mit ihrer Verbindungslinie; diese ist somit ihre eigene reziproke Polare und als solche eine Erzeugende der betreffenden Bündelfläche.

Die Verbindungslinie zweier konjugierter Punkte ist eine Erzeugende einer Bündelfläche.

[1]) Reye, G. d. L. III S. 134 ff; Sturm, F. 3. O. S. 28; cf. Anm. 2 S. 10; Salmon-Fiedler, G. d. R. I S. 234. [2]) Reye, G. d. L. III S. 134 ff; [3]) Sturm, Fl. 3. O. S. 32; Sturm, Geom. Verw. III S. 415 und 416. [4]) Reye, G. d. L. III, S. 134; Sturm, Math. Ann. 19 S. 481; ders. Geom. Verw. IV S. 406.

Umgekehrt gilt auch: Jede Erzeugende einer Bündelfläche ist Verbindungslinie von zwei konjugierten Punkten[1]).

Eine beliebige Erzeugende von f schneidet die Flächen g und h in den Punkten $G_1\,G_2$ und $H_1\,H_2$. Zu beiden Punktepaaren gibt es ein gemeinsames harmonisches Paar $J_1\,J_2$. Da $J_1$ und $J_2$ auf einer Erzeugenden von f liegen, sind sie bezüglich f sich selbst zugeordnet. Da sie ausserdem harmonische Pole in bezug auf g und h sind, sind sie konjugierte Punkte im Bündel.

**11. Der Komplex der Erzeugenden.** Die Verbindungslinie zweier Punkte $P_1\,(x^{(1)})$ und $P_2\,(x^{(2)})$ ist Erzeugende der Bündelfläche (1), wenn (vgl. Staude II § 67, (27) die Gleichungen erfüllt sind:

$$(15)\quad \begin{cases} f_{11} + \lambda g_{11} + \mu h_{11} = 0, \\ f_{12} + \lambda g_{12} + \mu h_{12} = 0, \\ f_{22} + \lambda g_{22} + \mu h_{22} = 0, \end{cases}$$

so dass dann unabhängig von $\lambda$ und $\mu$ zwischen zwei Punkten einer Erzeugenden die Beziehung besteht:

$$(16)\quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0^{2})$$

Darin ist:

$$(16')\quad \begin{aligned} f_{11} &= f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}), \quad f_{22} = f(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4^{(2)}) \\ f_{12} &= f_{21} = f_1^{(1)} x_1^{(2)} + f_2^{(1)} x_2^{(2)} + f_3^{(1)} x_3^{(2)} + f_4^{(1)} x_4^{(2)} \end{aligned}$$

und entsprechend mit g und h.

Da die $\infty^2$ Flächen $\infty^3$ Erzeugende haben, bilden die Erzeugenden einen Strahlenkomplex. In der Tat enthält die Gleichung (16) die Koordinaten $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ in den Verbindungen

$$p_{ik} = x_i^{(1)} x_k^{(2)} - x_k^{(1)} x_i^{(2)}.$$

Sie ist daher die Gleichung des Komplexes in Strahlenkoordinaten. Ihre Entwickelung geschieht unter Anwendung der Formeln Staude I § 59 **1** (1').

Da die Gleichung (16) in den x vom 6. Grade ist, muss sie in den $p_{ik}$ vom 3. Grade sein.

Der Komplex der Erzeugenden der Bündelflächen ist ein Komplex dritten Grades[3]).

[1]) Reye, G. d. L. III, S. 134. [2]) Salmon-Fiedler, G. d. R. I Nr. 256, B 2 gibt auch den Weg zur Umformung in Strahlenkoordinaten. [3]) Reye, G. d. L. III S. 134 ff; Sturm, J. f. Math. 70 (1869) S. 214.

**12. Andere Bedeutung des Komplexes.** Die Schnittpunktpaare $\tau_1\ \tau_2$ einer durch die Punkte $P_1\ (x^{(1)})$ und $P_2\ (x^{(2)})$ gegebenen Geraden mit den Flächen (2) werden bestimmt aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} f_{11} + 2f_{12}\,\tau + f_{22}\,\tau^2 &= 0 \\ g_{11} + 2g_{12}\,\tau + g_{22}\,\tau^2 &= 0 \\ h_{11} + 2h_{12}\,\tau + h_{22}\,\tau^2 &= 0 \end{aligned}$$

(vgl. Staude II § 67(7)).

Sie sind in Involution unter der Bedingung (16). (vgl. Staude II § 8. 21).

Der Komplex (16) wird auch von den Geraden gebildet, die die drei Grundflächen in Punkten einer Involution schneiden.

Zwei der Grundflächen, etwa $g = 0$ und $h = 0$ bestimmen die Involution auf der Geraden $P_1 P_2$. Da mit der Gleichung (16) auch gilt

$$\begin{vmatrix} f_{11} + \lambda g_{11} + \mu h_{11} & f_{12} + \lambda g_{12} + \mu h_{12} & f_{22} + \lambda g_{22} + \mu h_{22} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0$$

identisch in $\lambda$, $\mu$, so schneidet auch die Fläche (1) die Gerade in zwei Punkten der durch g und h bestimmten Involution.

Die Strahlen des Komplexes (16) werden von allen Flächen des Bündels in Punktepaaren derselben Involution geschnitten[1]).

**13. Umwandlung der Komplexgleichung.** Die Gleichung (16) lässt sich mit ausführlicher Schreibweise der Ausdrücke (16′) und nach dem erweiterten Multiplikationstheorem von Determinanten (cf. Pascal, Repert. d. höh. Math. I, 1 S. 60) folgendermassen zerlegen, indem man statt der Indices (1) und (2) die Akzente (′) und (″) einführt:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1'^2 + a_{22}x_2'^2 + \ldots a_{11}x_1'x_1'' + a_{22}x_2'x_2'' + \ldots a_{11}x_1''^2 + a_{22}x_2''^2 + \ldots \\ &b_{11}x_1'^2 + b^{22}x_2'^2 + \ldots b_{11}x_1'x_1'' + b_{22}x_2'x_2'' + \ldots b_{11}x_1''^2 + b_{22}x_2''^2 + \ldots \\ &c_{11}x_1'^2 + c_{22}x_2'^2 + \ldots c_{11}x_1'x_1'' + c_{22}x_2'x_2'' + \ldots c_{11}x_1''^2 + c_{22}x_2''^2 + \ldots \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} & a_{23} & a_{31} & a_{12} & a_{14} & a_{24} & a_{34} \\ b_{11} & b_{22} & b_{33} & b_{44} & b_{23} & b_{31} & b_{12} & b_{14} & b_{24} & b_{34} \\ c_{11} & c_{22} & c_{33} & c_{44} & c_{23} & c_{31} & c_{12} & c_{14} & c_{24} & c_{34} \end{vmatrix}$$

[1]) Salmon-Fiedler, G. d. R. I S. 412.

$$\begin{vmatrix} x_1'^2 & x_2'^2 & x_3'^2 & x_4'^2 & 2x_2'x_3' & 2x_3'x_1' \\ x_1'x_1'' & x_2'x_2'' & x_3'x_3'' & x_4'x_4'' & (x_2'x_3'' + x_3'x_2'') & (x_3'x_1'' + x_3''x_1') \\ x_1''^2 & x_2''^2 & x_3''^2 & x_4''^2 & 2x_2''x_3'' & 2x_3''x_1'' \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} \ldots\ldots & 2x_3'x_1' \\ \ldots\ldots & (x_3'x_4'' + x_3''x_4') \\ \ldots\ldots & 2x_3''x_4'' \end{matrix}$$

Dies Produkt zweier Matrizen ist nach dem Satze von Cauchy und Binet (cf. Pascal, Repert. ebenda) gleich der Summe der Produkte der Determinanten der ersten Matrix in die entsprechenden Determinanten der zweiten.

**14. Unabhängigkeit der Unterdeterminanten der 2. Matrix von der Wahl der Punkte P′ und P″ auf der Geraden.** Statt von den Punkten P′ (x′) und P″ (x″) der Geraden P′ P″ auszugehen, kann man zwei beliebige andere Punkte der Geraden wählen, mit den Koordinaten

$$x_i' + \tau x_i'' \text{ und } x_i' + \sigma x_i'' \ (i = 1,2,3,4).$$

Eine beliebige Determinante der zweiten Matrix in **13.**

$$D\,(mn, op, rs) = \begin{vmatrix} 2x_m'x_n' & 2x_o'x_p' & 2x_r'x_s' \\ x_m'x_n'' + x_n'x_m'' & x_o'x_p'' + x_p'x_o'' & x_r'x_s'' + x_s'x_r'' \\ 2x_m''x_n'' & 2x_o''x_p'' & 2x_r''x_s'' \end{vmatrix}$$

nimmt bei Einsetzen der Koordinaten der neuen Punkte die Gestalt an:

$$\begin{aligned} D = 4. & \begin{vmatrix} (x_m' + \tau x_m'')(x_n' + \tau x_n'') & \ldots \\ (x_m' + \tau x_m'')(x_n' + \sigma x_n'') + (x_m' + \sigma x_m'')(x_n' + \tau x_n'') & \ldots \\ (x_m' + \sigma x_m'')(x_n' + \sigma x_n'') & \ldots \end{vmatrix} \\ = 4. & \begin{vmatrix} x_m'x_n' + \tau(x_m'x_n'' + x_n'x_m'') + \tau^2 x_m''x_n'' & \ldots \\ 2x_m'x_n' + \tau(x_m'x_n'' + x_n'x_m'') + \sigma(x_m'x_n'' + x_m''x_n') & \\ \quad + 2\sigma\tau x_n''x_m'' & \ldots \\ x_m'x_n' + \sigma(x_m'x_n'' + x_n'x_m'') + \sigma^2 x_m''x_n'' & \ldots \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Für $x_n'x_m'$ bezw. $(x_n'x_m'' + x_m'x_n'')$ bezw. $x_n''x_m''$ führt man die Buchstaben a bezw. b bezw. c ein und macht es analog in den beiden anderen Kolonnen. Dann wird

$$\begin{aligned} D = 4. & \begin{vmatrix} a + \tau b + \tau^2 c & \ldots \\ 2a + (\tau + \sigma)b + 2\sigma\tau c & \ldots \\ a + \sigma b + \sigma^2 c & \ldots \end{vmatrix} \\ 4.(\sigma-\tau)^3 & \begin{vmatrix} a & \ldots \\ b & \ldots \\ c & \ldots \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= (\sigma\text{-}\tau)^3 \begin{vmatrix} 2\,x_m'\,x_n' & 2\,x_o'\,x_p' & 2\,x_r'\,x_s' \\ x_m'\,x_n'' + x_n'\,x_m'' & x_o'\,x_p'' + x_p'\,x_o'' & x_r'\,x_s'' + x_s'\,x_r'' \\ 2\,x_m''\,x_n'' & 2\,x_o''\,x_p'' & 2\,x_r''\,x_s'' \end{vmatrix}$$

Da sich jedes D nur um den konstanten Faktor $(\sigma-\tau)^3$ verändert, ändert sich die Gleichung des Komplexes nicht.

**15. Übersicht der Determinanten der Matrix.** Die Matrix in 13. enthält 120 Determinanten, die man in vier Typen einteilen kann. Es kommen vor:

I. solche mit 3 Quadraten : 4 Formeln

$$\begin{vmatrix} x_1'^2 & x_2'^2 & x_3'^2 \\ x_1'\,x_1'' & x_2'\,x_2'' & x_3'\,x_3'' \\ x_1''^2 & x_2''^2 & x_3''^2 \end{vmatrix} = -p_{23}\,p_{31}\,p_{12}$$

II. solche mit 2 Quadraten und einem Produkt : 36 Formeln; dabei drei Unterarten:

1. $$\begin{vmatrix} x_2'^2 & x_3'^2 & 2\,x_2'\,x_3' \\ x_2'\,x_2'' & x_3'\,x_3'' & x_2'\,x_3'' + x_3'\,x_2'' \\ x_2''^2 & x_3''^2 & 2\,x_2''\,x_3'' \end{vmatrix} = -p_{23}^3$$ 6 Formeln

2. $$\begin{vmatrix} x_2'^2 & x_3'^2 & 2\,x_1'\,x_2' \\ x_2'\,x_2'' & x_3'\,x_3'' & x_1'\,x_2'' + x_2'\,x_1'' \\ x_2''^2 & x_3''^2 & 2\,x_1''\,x_2'' \end{vmatrix} = p_{23}^2\,p_{12}$$ 24 Formeln

3. $$\begin{vmatrix} x_2'^2 & x_3'^2 & 2\,x_1'\,x_4' \\ x_2'\,x_2'' & x_3'\,x_3'' & x_1'\,x_4'' + x_4'\,x_1'' \\ x_2''^2 & x_3''^2 & 2\,x_1''\,x_4'' \end{vmatrix} = p_{23}\,(p_{21}\,p_{34} + p_{31}\,p_{24})$$ 6 Formeln

III. solche mit einem Quadrat und 2 Produkten : 60 Formeln; dabei vier Unterarten:

1. $$\begin{vmatrix} x_1'^2 & 2\,x_1'\,x_2' & 2\,x_3'\,x_1' \\ x_1'\,x_1'' & x_1'\,x_2'' + x_2'\,x_1'' & x_1'\,x_3'' + x_3'\,x_1'' \\ x_1''^2 & 2\,x_1''\,x_2'' & 2\,x_3''\,x_1'' \end{vmatrix} = 0$$ 12 Formeln

2. $$\begin{vmatrix} x_1'^2 & 2\,x_1'\,x_2' & 2\,x_2'\,x_3' \\ x_1'\,x_1'' & x_1'\,x_2'' + x_2'\,x_1'' & x_2'\,x_3'' + x_3'\,x_2'' \\ x_1''^2 & 2\,x_1''\,x_2'' & 2\,x_2''\,x_3'' \end{vmatrix} = 2\,p_{12}^2\,p_{13}$$ 24 Formeln

3. $$\begin{vmatrix} x_1'^2 & 2\,x_1'\,x_2' & 2\,x_3'\,x_4' \\ x_1'\,x_1'' & x_1'\,x_2'' + x_2'\,x_1'' & x_3'\,x_4'' + x_4'\,x_3'' \\ x_1''^2 & 2\,x_1''\,x_2'' & 2\,x_3''\,x_4'' \end{vmatrix} = 2\,p_{12}\,p_{13}\,p_{14}$$ 12 Formeln

4. $$\begin{vmatrix} x_1'^2 & 2\,x_2'\,x_3' & 2\,x_2'\,x_4' \\ x_1'\,x_1'' & x_2'\,x_3'' + x_3'\,x_2'' & x_2'\,x_4'' + x_4'\,x_2'' \\ x_1''^2 & 2\,x_2''\,x_3'' & 2\,x_2''\,x''_4 \end{vmatrix} = 2\,p_{12}^2\,p_{34}$$ 12 Formeln

IV. solche mit 3 Produkten: 20 Formeln;
dabei drei Unterarten:

1. $\begin{vmatrix} 2x_2'x_3' & 2x_3'x_1' & 2x_1'x_2' \\ x_2'x_3'' + x_3'x_2'' & x_3'x_1'' + x_1'x_3'' & x_1'x_2'' + x_2'x_1'' \\ 2x_2''x_3'' & 2x_3''x_1'' & 2x_1''x_2'' \end{vmatrix} = -4\,p_{23}\,p_{31}\,p_{12}$ — 4 Formeln

2. $\begin{vmatrix} 2x_2'x_3' & 2x_3'x_1' & 2x_1'x_4' \\ x_2'x_3'' + x_3'x_2'' & x_3'x_1'' + x_1'x_3'' & x_1'x_4'' + x_4'x_1'' \\ 2x_2''x_3'' & 2x_3''x_1'' & 2x_1''x_4'' \end{vmatrix} = -4\,p_{12}\,p_{13}\,p_{34}$ — 12 Formeln

3. $\begin{vmatrix} 2x_1'x_2' & 2x_3'x_1' & 2x_1'x_4' \\ x_1'x_2'' + x_2'x_1'' & x_3'x_1'' + x_1'x_3'' & x_1'x_4'' + x_4'x_1'' \\ 2x_1''x_2'' & 2x_3''x_1'' & 2x_1''x_4'' \end{vmatrix} = 0$ — 4 Formeln

Von den 120 Determinanten verschwinden also 16.

**16. Einteilung der Glieder der Gleichung.** Unter den Gliedern der Komplexgleichung in den Koordinaten $p_{ik}$ befinden sich folgende Arten:

a) $p^3$ entsteht aus Determinanten der Form 15. $II_{1)}$

b) $p_l{}^2 p_m$ entsteht aus Determinanten der Formen:
$II_{2)}$, $III_{2)}$, $III_{4)}$.

c) $p_l\, p_m\, p_n$ entsteht aus Determinanten der Formen:
I, $II_{3)}$, $III_{3)}$, $IV_{1)}$, $IV_{2)}$.

Die Glieder verteilen sich, wie folgt, in diese Rubriken, wobei die Determinante durch die gemeinsamen Indicespaare der drei Zeilen bezeichnet werde, z. B.: IV 2. mit (23, 31, 14).

a) $(11,22,12) = -p_{12}{}^3$ $(22,33,23) = -p_{23}{}^3$
$(33,11,31) = -p_{31}{}^3$ $(11,44,14) = -p_{14}{}^3$
$(22,44,24) = -p_{24}{}^3$ $(33,44,34) = -p_{34}{}^3$

b) $II_{2)}$ $(22,33,31) = -p_{23}{}^2 p_{31}$ $(22,33,34) = p_{23}{}^2 p_{34}$
$(22,33,12) = -p_{23}{}^2 p_{12}$ $(22,33,24) = p_{23}{}^2 p_{42}$
$(11,33,23) = -p_{31}{}^2 p_{32}$ $(11,33,24) = p_{31}{}^2 p_{34}$
$(11,33,12) = -p_{31}{}^2 p_{21}$ $(11,33,14) = p_{31}{}^2 p_{41}$
$(11,22,31) = -p_{12}{}^2 p_{31}$ $(11,22,23) = p_{12}{}^2 p_{23}$
$(11,22,14) = -p_{12}{}^2 p_{41}$ $(11,22,24) = p_{12}{}^2 p_{24}$
$(11,44,31) = -p_{14}{}^2 p_{31}$ $(11,44,34) = p_{14}{}^2 p_{34}$
$(11,44,12) = -p_{14}{}^2 p_{21}$ $(11,44,24) = p_{14}{}^2 p_{42}$
$(22,44,12) = -p_{24}{}^2 p_{12}$ $(22,44,14) = p_{24}{}^2 p_{41}$
$(22,44,23) = p_{24}{}^2 p_{32}$ $(22,44,34) = p_{24}{}^2 p_{43}$
$(33,44,31) = -p_{34}{}^2 p_{13}$ $(33,44,14) = p_{34}{}^2 p_{41}$

$(33,44,23) \quad p_{34}^2\, p_{23} \qquad (33,44,24) = p_{34}^2\, p_{42}$

III$_2$) $(11,12,23) \quad 2\, p_{12}^2\, p_{13} \qquad (11,12,24) = 2\, p_{12}^2\, p_{14}$

$(22,21,14) \quad 2\, p_{12}^2\, p_{24} \qquad (22,21,13) = 2\, p_{12}^2\, p_{32}$

$(22,23,34) = 2\, p_{23}^2\, p_{24} \qquad (22,23,31) = 2\, p_{23}^2\, p_{21}$

$(33,32,21) = 2\, p_{23}^2\, p_{31} \qquad (33,32,24) = 2\, p_{23}^2\, p_{34}$

$(11,13,34) = 2\, p_{31}^2\, p_{14} \qquad (11,13,32) = 2\, p_{31}^2\, p_{21}$

$(33,31,12) \quad 2\, p_{31}^2\, p_{32} \qquad (33,31,14) = 2\, p_{31}^2\, p_{34}$

$(11,14,42) = 2\, p_{14}^2\, p_{12} \qquad (11,14,43) = 2\, p_{14}^2\, p_{13}$

$(44,41,12) = 2\, p_{14}^2\, p_{24} \qquad (44,41,13) = 2\, p_{14}^2\, p_{34}$

$(22,24,41) = 2\, p_{24}^2\, p_{21} \qquad (22,24,43) = 2\, p_{24}^2\, p_{23}$

$(44,42,23) = 2\, p_{24}^2\, p_{34} \qquad (44,42,21) = 2\, p_{24}^2\, p_{14}$

$(33,34,41) = 2\, p_{34}^2\, p_{31} \qquad (33,34,42) = 2\, p_{34}^2\, p_{32}$

$(44,43,31) = 2\, p_{34}^2\, p_{41} \qquad (44,43,32) = 2\, p_{34}^2\, p_{42}$

III.$_4$) $(11,23,24) = (22,13,14) = 2\, p_{12}^2\, p_{34}$

$(11,32,34) = (33,12,14) = 2\, p_{31}^2\, p_{24}$

$(22,31,34) = (33,21,24) = 2\, p_{23}^2\, p_{14}$

$(11,42,43) = (44,12,13) = 2\, p_{14}^2\, p_{23}$

$(22,41,43) = (44,21,23) = 2\, p_{24}^2\, p_{13}$

$(33,41,42) = (44,31,32) = 2\, p_{34}^2\, p_{12}$

c) I. $(11,22,33) = -\, p_{23}\, p_{31}\, p_{12} \qquad (11,33,44) = -\, p_{34}\, p_{41}\, p_{13}$

$(11,22,44) = -\, p_{24}\, p_{41}\, p_{12} \qquad (22,33,44) = -\, p_{34}\, p_{42}\, p_{23}$

II.$_3$) $(22,33,14) = p_{23}\,(p_{21}\, p_{34} + p_{31}\, p_{24})$

$(11,33,24) = p_{31}\,(p_{32}\, p_{14} + p_{12}\, p_{34})$

$(11,22,34) = p_{12}\,(p_{13}\, p_{24} + p_{23}\, p_{14})$

$(11,44,23) = p_{14}\,(p_{31}\, p_{24} + p_{21}\, p_{34})$

$(22,44,31) = p_{24}\,(p_{12}\, p_{34} + p_{32}\, p_{14})$

$(33,44,12) = p_{34}\,(p_{23}\, p_{14} + p_{13}\, p_{24})$

III.$_3$) $(11,12,34) = (11,13,24) = (11,14,23) = 2\, p_{12}\, p_{13}\, p_{14}$

$(22,21,34) = (22,23,14) = (22,24,13) = 2\, p_{21}\, p_{23}\, p_{24}$

$(33,31,24) = (33,32,14) = (33,34,12) = 2\, p_{31}\, p_{32}\, p_{34}$

$(44,41,23) = (44,42,13) = (44,43,12) = 2\, p_{41}\, p_{42}\, p_{43}$

IV.$_1$) $(23,31,12) = 4\, p_{23}\, p_{31}\, p_{12} \qquad (31,14,43) = 4\, p_{31}\, p_{14}\, p_{43}$

$(32,24,43) = 4\, p_{32}\, p_{24}\, p_{43} \qquad (21,14,42) = 4\, p_{12}\, p_{14}\, p_{24}$

IV.$_2$) $(23,31,14) = 4\, p_{13}\, p_{12}\, p_{34} \qquad (23,34,41) = 4\, p_{24}\, p_{34}\, p_{31}$

$(12,23,34) = 4\, p_{13}\, p_{23}\, p_{24} \qquad (32,24,41) = 4\, p_{21}\, p_{24}\, p_{34}$

$(31,12,24) = 4\, p_{23}\, p_{21}\, p_{14} \qquad (12,24,43) = 4\, p_{23}\, p_{24}\, p_{14}$

$(32,21,14) = 4\, p_{31}\, p_{21}\, p_{24} \qquad (21,14,43) = 4\, p_{13}\, p_{14}\, p_{24}$

$(21,13,34) = 4\, p_{32}\, p_{31}\, p_{14} \qquad (31,14,42) = 4\, p_{12}\, p_{14}\, p_{34}$

$(13,32,24) = 4\, p_{32}\, p_{12}\, p_{34} \qquad (13,34,42) = 4\, p_{32}\, p_{14}\, p_{34}$

**17. Die Komplexgleichung in Strahlenkoordinaten.** Die Gleichung kann in der Weise geschrieben werden, dass jedes mögliche Glied $(p_{ik}\ p_{lm}\ p_{rs})$ zusammengefasst wird mit der zugehörigen Determinante der Matrix der Koëffizienten. In jeder dieser Determinanten 3. Grades

$$(17)\quad \begin{vmatrix} a_{\alpha\beta} & a_{\gamma\delta} & a_{\varepsilon\eta} \\ b_{\alpha\beta} & b_{\gamma\delta} & b_{\varepsilon\eta} \\ c_{\alpha\beta} & c_{\gamma\delta} & c_{\varepsilon\eta} \end{vmatrix} = (a_{\alpha\beta}\, b_{\gamma\delta}\, c_{\varepsilon\eta}) = (\alpha\beta,\ \gamma\delta,\ \varepsilon\eta)$$

dürfen die Indizes einer und derselben Grösse, z. B. $\alpha$ und $\beta$, vertauscht werden, dagegen verursacht die Vertauschung zweier Gruppen, wie $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$, einen Zeichenwechsel.

Hiernach lautet die Gleichung des Komplexes 3. Grades:

$$\begin{aligned}(18)\quad & -(22,33,23)\ p_{23}^3 - (33,11,31)\ p_{31}^3 - (11,22,12)\ p_{12}^3 \\ & -(11,44,14)\ p_{14}^3 - (22,44,24)\ p_{24}^3 - (33,44,34)\ p_{34}^3 \\ & -[(11,22,13) - 2\,(11,12,23)]\ p_{12}^2\ p_{13} - [(22,11,23) \\ & \qquad - 2\,(22,21,13)]\ p_{21}^2\ p_{23} \\ & -[(33,11,32) - 2\,(33,31,12)]\ p_{31}^2\ p_{32} - [(44,11,42) \\ & \qquad - 2\,(44,41,12)]\ p_{41}^2\ p_{42} \\ & -[(11,33,12) - 2\,(11,13,32)]\ p_{13}^2\ p_{12} - [(22,33,21) \\ & \qquad - 2\,(22,23,31)]\ p_{23}^2\ p_{21} \\ & -[(33,22,31) - 2\,(33,32,21)]\ p_{32}^2\ p_{31} - [(44,22,41) \\ & \qquad - 2\,(44,42,21)]\ p_{42}^2\ p_{41} \\ & -[(11,22,14) - 2\,(11,12,24)]\ p_{12}^2\ p_{14} - [(22,11,24) \\ & \qquad - 2\,(22,21,14)]\ p_{21}^2\ p_{24} \\ & -[(33,11,34) - 2\,(33,31,14)]\ p_{31}^2\ p_{34} - [(44,11,43) \\ & \qquad - 2\,(44,41,13)]\ p_{41}^2\ p_{43} \\ & -[(11,44,12) - 2\,(11,14,42)]\ p_{14}^2\ p_{12} - [(22,44,21) \\ & \qquad - 2\,(22,24,41)]\ p_{24}^2\ p_{21} \\ & -[(33,44,31) - 2\,(33,34,41)]\ p_{34}^2\ p_{31} - [(44,33,41) \\ & \qquad - 2\,(44,43,31)]\ p_{43}^2\ p_{41} \\ & -[(11,33,14) - 2\,(11,13,34)]\ p_{13}^2\ p_{14} - [(22,33,24) \\ & \qquad - 2\,(22,23,34)]\ p_{23}^2\ p_{24} \\ & -[(33,22,34) - 2\,(33,32,24)]\ p_{32}^2\ p_{34} - [(44,22,43) \\ & \qquad - 2\,(44,42,23)]\ p_{42}^2\ p_{43} \\ & -[(11,44,13) - 2\,(11,14,43)]\ p_{14}^2\ p_{13} - [(22,44,23) \\ & \qquad - 2\,(22,24,43)]\ p_{24}^2\ p_{23} \\ & -[(33,44,32) - 2\,(33,34,42)]\ p_{34}^2\ p_{32} - [(44,33,42) \\ & \qquad - 2\,(44,43,32)]\ p_{43}^2\ p_{42}\end{aligned}$$

$$+ 2\,[(11,23,24) + (22,13,14)]\,p_{12}^2\,p_{34} + 2\,[(11,32,34) + (33,12,14)]\,p_{13}^2\,p_{24}$$
$$+ 2\,[(11,24,34) + (44,12,13)]\,p_{14}^2\,p_{23} + 2\,[(33,41,42) + (44,31,32)]\,p_{34}^2\,p_{12}$$
$$+ 2\,[(22,41,43) + (44,21,23)]\,p_{24}^2\,p_{13} + 2\,[(22,31,34) + (33,21,24)]\,p_{23}^2\,p_{14}$$
$$- [(11,22,33) - 4\,(23,31,12)]\,p_{23}\,p_{31}\,p_{12} - [(11,22,44) - 4\,(24,41,12)]\,p_{24}\,p_{41}\,p_{12}$$
$$- [(11,33,44) - 4\,(34,41,13)]\,p_{34}\,p_{41}\,p_{13} - [(22,33,44) - 4\,(34,42,23)]\,p_{34}\,p_{42}\,p_{23}$$
$$+ 2\,[(11,12,34) + (11,13,24) + (11,14,23)]\,p_{12}\,p_{13}\,p_{14}$$
$$+ 2\,[(22,21,34) + (22,23,14) + (22,24,13)]\,p_{21}\,p_{23}\,p_{24}$$
$$+ 2\,[(33,31,24) + (33,32,14) + (33,34,12)]\,p_{31}\,p_{32}\,p_{34}$$
$$+ 2\,[(44,41,23) + (44,42,13) + (44,43,12)]\,p_{41}\,p_{42}\,p_{43}$$
$$+ [4(23,31,14) + (11,33,24)]\,p_{12}\,p_{13}\,p_{34} + [4(13,32,24) + (22,33,14)]\,p_{21}\,p_{23}\,p_{34}$$
$$+ [4(12,23,34) + (33,22,14)]\,p_{31}\,p_{32}\,p_{24} + [4(32,21,14) + (11,22,34)]\,p_{13}\,p_{12}\,p_{24}$$
$$+ [4(31,12,24) + (22,11,34)]\,p_{23}\,p_{21}\,p_{14} + [4(21,13,34) + (33,11,24)]\,p_{32}\,p_{31}\,p_{14}$$
$$+ [4(23,34,41) + (44,33,21)]\,p_{42}\,p_{43}\,p_{31} + [4(13,34,42) + (44,33,12)]\,p_{41}\,p_{43}\,p_{32}$$
$$+ [4(12,24,43) + (44,22,13)]\,p_{41}\,p_{42}\,p_{23} + [4(32,24,41) + (44,22,31)]\,p_{43}\,p_{42}\,p_{21}$$
$$+ [4(31,14,42) + (44,11,32)]\,p_{43}\,p_{41}\,p_{12} + [4(21,14,43) + (44,11,23)]\,p_{42}\,p_{41}\,p_{13} = 0$$

**18. Ort der Punkte mit konjugierter Geraden.** Die drei Ebenen (7) gehen durch eine Gerade, wenn die Matrix der Koëffizienten gleich Null ist, wenn also mit Unterdrückung des oberen Index „0“ ist:

$$(19) \qquad \begin{Vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{Vmatrix} = 0.$$

Der Ort derjenigen Punkte, deren Polarebenen in bezug auf die $\infty^2$ Bündelflächen kein Ebenenbündel, sondern ein Ebenenbüschel bilden, denen also nicht ein Punkt, sondern eine Gerade konjugiert ist, ist die Raumkurve, die durch die Gleichung (19) dargestellt wird. Sie heisst die Kernkurve[1]) des Flächenbündels.

[1]) Enz. d. math. Wiss. III 2,2 Nr. 131; Hesse, Werke S. 349: Salmon-

**19. Die Kernkurve als Ort der Kegelspitzen.** Ist die Bündelfläche (1) ein Kegel, so genügt die Spitze des Kegels den vier Gleichungen:

$$(20)\quad \begin{cases} f_1 + \lambda g_1 + \mu h_1 = 0, \\ f_2 + \lambda g_2 + \mu h_2 = 0, \\ f_3 + \lambda g_3 + \mu h_3 = 0, \\ f_4 + \lambda g_4 + \mu h_4 = 0, \end{cases}$$

deren Bestehen zunächst für $\lambda, \mu$ die Bedingung erfordert:

$$(21)\quad \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda b_{11} + \mu c_{11} & a_{12} + \lambda b_{12} + \mu c_{12} & a_{13} + \lambda b_{13} + \mu c_{13} \\ a_{21} + \lambda b_{21} + \mu c_{21} & a_{22} + \lambda b_{22} + \mu c_{22} & a_{23} + \lambda b_{23} + \mu c_{23} \\ a_{31} + \lambda b_{31} + \mu c_{31} & a_{32} + \lambda b_{32} + \mu c_{32} & a_{33} + \lambda b_{33} + \mu c_{33} \\ a_{41} + \lambda b_{41} + \mu c_{41} & a_{42} + \lambda b_{42} + \mu c_{42} & a_{43} + \lambda b_{43} + \mu c_{43} \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a_{14} + \lambda b_{14} + \mu c_{14} \\ a_{24} + \lambda b_{24} + \mu c_{24} \\ a_{34} + \lambda b_{34} + \mu c_{34} \\ a_{44} + \lambda b_{44} + \mu c_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Elimination von $(1, \lambda, \mu)$ aus den Gleichungen (20) führt wieder auf die Matrix (19). Die Kernkurve ist mithin auch der Ort der Kegelspitzen im Bündel[1]). Die vier Gleichungen (20) zählen, wenn (21) erfüllt ist, nur für drei unabhängige Gleichungen, die für ein der Gleichung (21) entsprechendes Parameterpaar $\lambda, \mu$ die Kegelspitze bestimmen; da durch das Verschwinden der Determinante (21) die 2 Parameter einer Bedingung unterworfen werden, rechnen sie nur für einen. Daher gibt es im Bündel $\infty^1$ Kegel.

Die Kernkurve (19) des Flächenbündels ist der Ort der Spitzen der $\infty^1$ Kegel im Bündel.

Sie enthält auch die Spitzen der vier Kegel eines jeden im Bündel enthaltenen Büschels von Flächen 2. O.

**20. Die Ordnung der Kernkurve.** Die Matrix (19) zerfällt in vier Gleichungen:

$$(22)\quad U_1 = \begin{vmatrix} f_2 & f_3 & f_4 \\ g_2 & g_3 & g_4 \\ h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad U_2 = -\begin{vmatrix} f_1 & f_3 & f_4 \\ g_1 & g_3 & g_4 \\ h_1 & h_3 & h_4 \end{vmatrix} = 0$$

Fiedler, G. d. R. I. S. 403. Reye, G. d. L. III. S. 134 ff; Schröter, Th. d. Fl. 2. O. S. 712; Sturm, Math. Ann. 19 S. 480. Nöther, Math. Ann. 3. S. 553; Sturm, Geom. Verw. IV. S. 407 die Achse des Ebenenbüschels ist eine Trisekante der Kernkurve; Sturm, Geom. Verw. III. S. 413.

[1]) Hesse, J. f. Math. 49 (1853) S. 282; Salmon-Fiedler, G. d. R. I. S. 403; Hierholzer, Math. Ann. 2 (1870) S. 583; Chasles, Par. C. R. 52 (1861) S. 1160; Sturm, Fl. 2. O. S. 37; Sturm, Geom. Verw. III S. 413.

$$U_3 = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_4 \\ g_1 & g_2 & g_4 \\ h_1 & h_2 & h_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad U_4 = -\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} = 0$$

Wenn man die Matrix zur Determinante 4. Grades ergänzt, indem man eine der drei Zeilen als vierte hinzufügt, so entstehen die drei identisch verschwindenden Gleichungen:

$$(23) \quad \begin{vmatrix} f_1 U_1 + f_2 U_2 + f_3 U_3 + f_4 U_4 = 0 \\ g_1 U_1 + g_2 U_2 + g_3 U_3 + g_4 U_4 = 0 \\ h_1 U_1 + h_2 U_2 + h_3 U_3 + h_4 U_4 = 0 \end{vmatrix}$$

die wieder wegen (20) nur für zwei unabhängige zählen. Ist daher für einen Punkt

$$(24) \quad U_3 = 0, \; U_4 = 0$$

so folgt für ihn aus den Gleichungen (23):

$$(25) \quad \begin{vmatrix} f_1 U_1 + f_2 U_2 = 0 \\ g_1 U_1 + g_2 U_2 = 0 \\ h_1 U_1 + h_2 U_2 = 0 \end{vmatrix} \text{ und damit}$$

$$(26) \quad U_1 = 0, \; U_2 = 0, \text{ wenn nicht die Matrix}$$

$$(27) \quad \begin{Vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{Vmatrix} = 0 \text{ ist.}$$

Da nun die Gleichungen (24) zwei Flächen 3. O. darstellen, und die Gleichung (27) eine Raumkurve 3. O. repräsentiert, (cf. Staude III, § 36, [20]) die den beiden Flächen (24) gemeinsam ist, die aber den Flächen (26) nicht angehört, so muss von dem Gesamtschnitt 9. O. der Flächen (24) die Raumkurve 3. O. (27) abgezogen werden, damit man den Schnitt erhält, der den vier Flächen (22) gemeinsam ist. Von diesen vier Gleichungen (22) sind also nur zwei unabhängig, die beiden andern sind aber nötig, um von der Gesamtschnittkurve 9. O. der beiden ersten die kubische Raumkurve (27) abzuspalten.

Die Kernkurve ist also eine Raumkurve 6. O., der gemeinsame Durchschnitt aller vier Flächen (22)[1]).

**21. Die Kernkurve als Ort der Berührung zweier Flächen.** Wenn sich zwei Flächen $f = 0$ und $g = 0$ in einem Punkte $P_0$ berühren, so liegt der Punkt $P_0$ auf beiden Flächen. Ausserdem haben aber beide auch die Tangentialebene gemeinsam. Es gelten also die Gleichungen:

$$f_1^0 = g_1^0, \; f_2^0 = g_2^0, \; f_3^0 = g_3^0, \; f_4^0 = g_4^0.$$

[1]) Salmon-Fiedler, G. d. R. I. S. 403; Cayley, Proc. Lond. Math. Soc. III S. 177. Der Grad wird auch angegeben bei den meisten in Anm. 1. und 2. auf Seite 19 und 20 verzeichneten Büchern.

Nehmen wir als Flächen, die sich berühren sollen, zwei beliebige Flächen des Bündels mit den Parametern $\alpha, \beta, \gamma$

$$\alpha_1 f + \beta_1 g + \gamma_1 h = 0$$
$$\alpha_2 f + \beta_2 g + \gamma_2 h = 0,$$

so lauten die vier Bedingungen geordnet nach den Ableitungen von f, g, h mit Unterdrückung des Index

$$f_1(\alpha_1 - \alpha_2) + g_1(\beta_1 - \beta_2) + h_1(\gamma_1 - \gamma_2) = 0$$
$$f_2(\alpha_1 - \alpha_2) + g_2(\beta_1 - \beta_2) + h_2(\gamma_1 - \gamma_2) = 0$$
$$f_3(\alpha_1 - \alpha_2) + g_3(\beta_1 - \beta_2) + h_3(\gamma_1 - \gamma_2) = 0$$
$$f_4(\alpha_1 - \alpha_2) + g_4(\beta_1 - \beta_2) + h_4(\gamma_1 - \gamma_2) = 0.$$

Da die Grössen $(\alpha_1 - \alpha_2)$, $(\beta_1 - \beta_2)$, $(\gamma_1 - \gamma_2)$ nicht alle verschwinden, so muss die Matrix des Systems gleich Null sein. Diese Matrix ist aber die Gleichung (19).

Die Kernkurve (19) des Flächenbündels ist 1. der Ort der Punkte, in denen sich zwei Flächen des Bündels berühren[1]), 2. der Ort der Spitzen aller Kegel im Bündel, 3. der Ort der Punkte, deren Polarebenen in bezug auf sämtliche Bündelflächen ein Ebenenbüschel bilden[2]).

**22. Die Kernkurve und die kubische Polfläche einer Ebene.** Da durch die vier Gleichungen (22) auch die Gleichung erfüllt wird, die aus der Determinante (13) durch Entwickelung nach den Elementen der 1. Zeile entsteht, so gilt der Satz:

Die Kernkurve des Bündels liegt auf allen Flächen 3. O. (13), die den $\infty^3$ Ebenen des Raumes polar entsprechen[3]).

Schneiden sich zwei Ebenen $E_1$ und $E_2$ in einer Geraden g, so schneiden sich ihre kubischen Polflächen in der Kernkurve des Bündels und nach 5 in der der Geraden g zugeordneten kubischen Polkurve[4]).

**23. Kubische Verwandtschaft bezüglich des Bündels.** Eine Verwandtschaft zweier Räume der Art, dass einem Element

[1]) Sturm, Geom. Verw. III nennt die Kernkurve auch Jakobische Kurve (S. 112), und weist nach, dass im Flächennetze n^ter Ordnung die Jakobische Kurve Ort der Berührungspunkte zwischen zwei Flächen des Netzes ist. [2]) Salmon-Fiedler, G. d. R. I. S. 235; Chasles, C. R. 52 (1861) S. 1161. [3]) Sturm, Geom. Verw. III. S. 415 und IV. S. 407; Hesse, J. f. Math. 49 (1853) S. 281; Nöther, Math. Ann. 3 S. 556; Salmon-Fiedler, G. d. R. I S. 403; Schröter, Fl. 2. O. S. 712; Cayley Proc. Lond. Math. Soc. III. S. 178; Sturm Fl. 3. O. S. 38. [4]) Hesse, Werke S. 346; Sturm, Fl. 3. O. S. 38.

von der Ordnung n im einen Raum ein solches von der Ordnung 3n im anderen Raum zugeordnet ist, heisst eine kubische Verwandtschaft[1]).

Bezüglich des vorliegenden Bündels ist
einer Geraden eine kubische Raumkurve,
einer Ebene eine Fläche 3. O.
einer Fläche 2. O. eine Fläche 6. O. usw.
polar zugeordnet. Daher ist das Bündel der Träger einer kubischen Verwandtschaft[2]), die nach **9.** im allgemeinen 8 Koinzidenzpunkte hat[3]).

**24. Polarebenen eines Punktes in bezug auf ein Flächenbüschel 2. O.** Im Flächenbündel sind zweifach unendlich viele Flächenbüschel enthalten, deren jedes durch zwei Flächen des Bündels bestimmt ist. Ein Flächenbüschel hat die Gleichung:

$$(28) \qquad f + \lambda g = 0$$

worin $f = 0$ und $g = 0$ zwei der Flächen (2) seien. Ein Punkt $P^0 (x^0)$ hat in bezug auf die laufende Fläche des Büschels die Polarebene

$$(29)\ (f_1^0 + \lambda g_1^0)x_1 + (f_2^0 + \lambda g_2^0)x_2 + (f_3^0 + \lambda g_3^0)x_3 + (f_4^0 + \lambda g_4^0)x_4 = 0.$$

oder mit den Abkürzungen (5):

$$(30) \qquad X_0 + \lambda Y_0 = 0$$

Diese Gleichung stellt ein Ebenenbüschel[4]) dar, dessen Achse „die bezüglich des Büschels dem Punkte konjugierte Gerade" sei.

Ein Punkt hat in bezug auf ein Flächenbüschel 2. O. eine konjugierte Gerade[5]), die der Durchschnitt aller Polarebenen des Punktes bezüglich der Büschelflächen ist.

**25. Der Ort der konjugierten Geraden aller Punkte einer Geraden.** Der laufende Punkt P $(x^{(1)} + \tau x^{(2)})$ einer

[1]) Diese Bezeichnung bei Sturm, Math. Ann. 19 S. 480 u. Geom. Verw. IV. S. 406. [2]) Cremona, J. f. Math. 68 S. 72; ders. Ann. di. mat. ser 2 tom V S. 159; Nöther, Math. Ann. 3 S. 552; Sturm, Math. Ann. 19 S. 480; Cayley, Proc. Lond. Math. Soc. III. S. 174 ff; Sturm, Geom. Verw. III S. 412 u. S. 489. [3]) Sturm, Geom. Verw. IV. S. 407. [4]) Salmon-Fiedler, G. d. R. I. S. 232; Schröter, Th. d. Fl. 2. O. S. 695. [5]) Schröter, Th. d. Fl. 2. O. S. 695; Sturm, Geom. Verw. III. S. 489: die $\infty^1$ Punkte der Grundkurve des Büschels sind sich selbst konjugiert.

durch die Punkte $P_1$ $(x^{(1)})$ und $P_2$ $(x^{(2)})$ gegebenen Geraden hat als konjugierte Gerade die Achse des Ebenenbüschels

$$(31) \quad \{ X_1 + \tau X_2 \} + \lambda \{ Y_1 + \tau Y_2 \} = 0$$

also den Schnitt der Ebenen

$$X_1 + \tau X_2 = 0 \quad Y_1 + \tau Y_2 = 0.$$

Die Elimination des Parameters $\tau$ ergibt

$$(32) \quad X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = 0.$$

Das ist die Gleichung eines Hyperboloides (vgl. Staude II, § 159,5).

Der Ort der konjugierten Geraden aller Punkte einer Geraden ist das Hyperboloid[1]) (32).

**26. Der Ort der reziproken Polaren einer Geraden.** Die Gerade $P_1 P_2$ hat als reziproke Polare in bezug auf die laufende Büschelfläche die Achse des Ebenenbüschels:

$$(33) \quad \{ X_1 + \lambda Y_1 \} + \tau \{ X_2 + \lambda Y_2 \} = 0$$

also den Schnitt der Ebenen

$$X_1 + \lambda Y_1 = 0 \quad X_2 + \lambda Y_2 = 0.$$

Die Elimination des Parameters $\lambda$ liefert die Gleichung (32).

Der Ort der reziproken Polaren einer Geraden ist ein Hyperboloid[2]), das der Ort der konjugierten Geraden ihrer Punkte ist.

Die konjugierten Geraden der Punkte einer Geraden bilden die eine Schar, die reziproken Polaren der Geraden die andere Schar der Erzeugenden eines Hyperboloides.

Da bezüglich des Büschels jeder Geraden nur ein Hyperboloid polar zugeordnet ist, nennt man es das Polarhyperboloid[3]) der Geraden in bezug auf das Büschel.

**27. Das Bündel der Polarhyperboloide einer Geraden.** Die Polarhyperboloide der Geraden $P_1$ $(x^{(1)})$ $P_2$ $(x^{(2)})$ bezüglich der drei durch je zwei der Grundflächen (2) bestimmten Büschel im Bündel:

$$(34) \quad g + \lambda h = 0, \; h + \lambda f = 0, \; f + \lambda g = 0$$

sind die drei Grundpolarhyperboloide:

$$(35) \quad \begin{cases} H_1 = Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2 = 0 \\ H_2 = Z_1 X_2 - X_1 Z_2 = 0 \\ H_3 = X_1 Y_2 - Y_1 X_2 = 0 \end{cases}$$

[1]) Sturm, Fl. 3. O. S. 31. [2]) Salmon-Fiedler G. d. R. I. S. 233; Sturm, Fl. 3. O. S. 31. Sturm, Geom. Verw. III. S. 414. [3]) Enz. d. math. Wiss. III. 2,2 Nr. 71; Sturm, J. f. Math. 70 (1869) S. 218; Sturm, Fl. 3. O. S. 32.

Die beiden Hyperboloide $H_3 = 0$ und $H_1 = 0$ schneiden sich in einer Raumkurve 4. O. Sind nun:

$$(36) \quad Y_1 = 0, \quad Y_2 = 0$$

so muss die Determinante verschwinden:

$$(37) \quad Z_1 X_2 - X_1 Z_2 = 0$$

d. h. diese Fläche $H_2 = 0$ hat mit $H_1 = 0$ und $H_3 = 0$ den Schnitt gemein, der übrig bleibt, wenn man von der Raumkurve 4. O. die Gerade:

$$(38) \quad Y_1 = 0 \quad Y_2 = 0$$

abspaltet, das ist aber eine Raumkurve 3. O.

Die Gerade (38) ist die reziproke Polare der Geraden bezüglich der Fläche $g = 0$ und ist eine Sehne der Raumkurve. Diese Raumkurve, die den gemeinsamen Schnitt der drei Polarhyperboloide (35) darstellt, ist Grundkurve eines Bündels, das diese drei Hyperboloide bestimmen

$$(39) \quad H_1 + \lambda H_2 + \mu H_3 = 0.$$

Die Gleichung der Raumkurve ist in Form einer Matrix geschrieben

$$(40) \quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Dieselbe Matrix entsteht auch, wenn man aus den Gleichungen (11) die Grössen 1, $\lambda$, $\mu$ eliminiert.

Der Schnitt der drei Grundpolarhyperboloide ist die kubische Polkurve der Geraden bezüglich des Bündels.

Wählt man drei Büschel im Bündel, die durch je zwei von drei beliebigen Bündelflächen bestimmt werden, so führen die zugehörigen Polarhyperboloide auf dieselbe kubische Polkurve.

Die drei Büschel haben die Gleichungen

$$(41) \quad \begin{cases} (f + \lambda_2 g + \mu_2 h) + \alpha (f + \lambda_3 g + \mu_3 h) = 0 \\ (f + \lambda_3 g + \mu_3 h) + \alpha (f + \lambda_1 g + \mu_1 h) = 0 \\ (f + \lambda_1 g + \mu_1 h) + \alpha (f + \lambda_2 g + \mu_2 h) = 0. \end{cases}$$

Bezüglich dieser drei Büschel hat ein Punkt $P_1$ die konjugierten Geraden

$$(42) \quad \begin{cases} \{ X_1 + \lambda_2 Y_1 + \mu_2 Z_1 = 0, \; X_1 + \lambda_3 Y_1 + \mu_3 Z_1 = 0 \} \\ \{ X_1 + \lambda_3 Y_1 + \mu_3 Z_1 = 0, \; X_1 + \lambda_1 Y_1 + \mu_1 Z_1 = 0 \} \\ \{ X_1 + \lambda_1 Y_1 + \mu_1 Z_1 = 0, \; X_1 + \lambda_2 Y_1 + \mu_2 Z_1 = 0 \} \end{cases}$$

Eine Gerade $P_1 P_2$ hat bezüglich der drei Büschel (41) somit als Polarhyperboloide die drei Flächen 2. O., die den Determinanten der Matrix entsprechen:

$$(43)\quad \begin{vmatrix} X_1 + \lambda_1 Y_1 + \mu_1 Z_1 & X_1 + \lambda_2 Y_1 + \mu_2 Z_1 & \\ X_2 + \lambda_1 Y_2 + \mu_1 Z_2 & X_2 + \lambda_2 Y_2 + \mu_2 Z_2 & \\ & & X_1 + \lambda_3 Y_1 + \mu_3 Z_1 \\ & & X_2 + \lambda_3 Y_2 + \mu_3 Z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Jede Determinante dieser Matrix lässt sich in zwei Faktoren zerlegen

$$(44)\quad \begin{vmatrix} X_1 + \lambda_i Y_1 + \mu_i Z_1 & X_1 + \lambda_k Y_1 + \mu_k Z_1 \\ X_2 + \lambda_i Y_2 + \mu_i Z_2 & X_2 + \lambda_k Y_2 + \mu_k Z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_j & \mu_i \\ 1 & \lambda_k & \mu_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$

daher geht auch jedes der Hyperboloide durch die kubische Polkurve (40) oder es gehört dem Bündel (39) an.

Die Polarhyperboloide einer Geraden bezüglich der $\infty^2$ Büschel im Bündel schneiden sich in der kubischen Polkurve der Geraden[1]) bezüglich des Bündels und bilden ein Flächenbündel 2. O. mit kubischer Grundkurve.

**28. Kegel im Bündel der Polarhyperboloide.** Die Gleichung des Polarhyperboloides sei die Gleichung (39). Ist die Determinante der Koëffizienten $D = 0$, so entartet das Hyperboloid in einen Kegel. Der Ort aller Kegelspitzen ist die kubische Polkurve der Geraden[2]) (vgl. Staude III § 31, 4 II). Ein Bündel der vorliegenden Art soll im Abschnitt II behandelt werden.

**29. Ort der Pole einer Ebene in bezug auf ein Büschel.** Das allgemeine Büschel im Bündel hat die Gleichung

$$(45)\quad (f + \lambda_1 g + \mu_1 h) + \alpha (f + \lambda_2 g + \mu_2 h) = 0$$

Der Pol einer Ebene, die durch die Punkte $P_1\,(x^{(1)})$ $P_2\,(x^{(2)})$ und $P_3\,(x^{(3)})$ bestimmt ist, ist daher mit den Abkürzungen (5) der Schnitt der drei Ebenen

$$(46)\quad \begin{cases} (X_1 + \lambda_1 Y_1 + \mu_1 Z_1) + \alpha (X_1 + \lambda_2 Y_1 + \mu_2 Z_1) = 0 \\ (X_2 + \lambda_1 Y_2 + \mu_1 Z_2) + \alpha (X_2 + \lambda_2 Y_2 + \mu_2 Z_2) = 0 \\ (X_3 + \lambda_1 Y_3 + \mu_1 Z_3) + \alpha (X_3 + \lambda_2 Y_3 + \mu_2 Z_3) = 0. \end{cases}$$

Wird $\alpha$ eliminiert, so erhält man als Ort der Pole die Raumkurve 3. O., die durch die Gleichung gegeben ist

$$(47)\quad \begin{vmatrix} X_1 + \lambda_1 Y_1 + \mu_1 Z_1 & X_2 + \lambda_1 Y_2 + \mu_1 Z_2 & X_3 + \lambda_1 Y_3 + \mu_1 Z_3 \\ X_1 + \lambda_2 Y_1 + \mu_2 Z_1 & X_2 + \lambda_2 Y_2 + \mu_2 Z_2 & X_3 + \lambda_2 Y_3 + \mu_2 Z_3 \end{vmatrix} = 0$$

[1]) Schröter, Th. d. Fl. 2. O. S. 709; Sturm, Fl. 3. O. S. 34.
[2]) Sturm, Fl. 3. O. S. 34.

Der Ort der Pole einer Ebene bezüglich der Flächen des Büschels (45) im Bündel ist die Raumkurve 3. O.[1] (47). Wir nennen sie die kubische Polkurve bezüglich des Büschels.

**30. Ort der konjugierten Geraden der Punkte der Ebene.** Hat der laufende Punkt P der Ebene $P_1\ P_2\ P_3$ die Koordinaten $\rho x = x^{(1)} + \sigma x^{(2)} + \tau x^{(3)}$, so ist die konjugierte Gerade der Schnitt der Ebenen

$$(48)\quad \left|\begin{array}{l} (X_1 + \lambda_1 Y_1 + \mu_1 Z_1) + \sigma (X_2 + \lambda_1 Y_2 + \mu_1 Z_2) \\ \qquad + \tau (X_3 + \lambda_1 Y_3 + \mu_1 Z_3) = 0 \\ (X_1 + \lambda_2 Y_1 + \mu_2 Z_1) + \sigma (X_2 + \lambda_2 Y_3 + \mu_2 Z_3) \\ \qquad + \tau (X_3 + \lambda_2 Y_3 + \mu_2 Z_3) = 0 \end{array}\right.$$

Mit laufenden $\sigma, \tau$ bilden diese Geraden die Sehnenkongruenz der Raumkurve 3. O. (47) (vgl. Staude III, § 36,7).

Der Ort der konjugierten Geraden der Punkte einer Ebene ist die Sehnenkongruenz der Raumkurve 3. O., die der Ort ihrer Pole bezüglich aller Büschelflächen ist.

**31. Die Polfläche 3. O. der Ebene als Erzeugnis kubischer Polkurven der Ebene.** Wenn man die Gleichungen (46) anders ordnet

$$(49)\quad \left|\begin{array}{l} X_1 (1 + \alpha) + Y_1 (\lambda_1 + \alpha \lambda_2) + Z_1 (\mu_1 + \alpha \mu_2) = 0 \\ X_2 (1 + \alpha) + Y_2 (\lambda_1 + \alpha \lambda_2) + Z_2 (\mu_1 + \alpha \mu_2) = 0 \\ X_3 (1 + \alpha) + Y_3 (\lambda_1 + \alpha \lambda_2) + Z_3 (\mu_1 + \alpha \mu_2) = 0, \end{array}\right.$$

so erhält man unabhängig von $\lambda$ und $\mu$, also von der Wahl des Büschels im Bündel die Gleichung der Fläche 3. O.

$$(50)\quad \left|\begin{array}{ccc} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{array}\right| = 0$$

die man auch durch eliminieren von $(1, \tau, \sigma)$ aus den Gleichungen (12) erhält.

Die kubische Polfläche 3. O. einer Ebene bezüglich des Bündels ist das Erzeugnis der $\infty^2$ Raumkurven 3. O., die der Ort der Pole der Ebene bezüglich aller Büschel im Bündel sind.[2]

[1]) Schröter, Th. d. Fl. 2. O. S. 697; Hesse, J. f. Math. 49 (1853) S. 279; Sturm, Fl. 3. O. S. 32. Salmon-Fiedler, G. d. R. I. S. 233; Sturm, Geom. Verw. III. S. 414 nennt diese Kurve Polkurve der Ebene. [2]) Sturm, Fl. 3. O. S. 32.

**32. Die Polfläche 3. O. als Erzeugnis kubischer Polkurven der Geraden in der Ebene.** Eine beliebige Gerade der Ebene $P_1 P_2 P_3$ hat als laufenden Punkt:

$$(x^{(1)} + \sigma_1 x^{(2)} + \tau_1 x^{(3)}) + \varkappa (x^{(1)} + \sigma_2 x^{(2)} + \tau_2 x^{(3)})$$

oder $x^{(1)} (1 + \varkappa) + x^{(2)} (\sigma_1 + \varkappa\sigma_2) + x^{(3)} (\tau_1 + \varkappa\tau_2)$

Die Polarebenen des laufenden Punktes bezüglich der Flächen (2) haben somit die Gleichungen:

$$(51)\quad \begin{aligned} (1 + \varkappa) X_1 + (\sigma_1 + \varkappa\sigma_2) X_2 + (\tau_1 + \varkappa\tau_2) X_3 &= 0 \\ (1 + \varkappa) Y_1 + (\sigma_1 + \varkappa\sigma_2) Y_2 + (\tau_1 + \varkappa\tau_2) Y_3 &= 0 \\ (1 + \varkappa) Z_1 + (\sigma_1 + \varkappa\sigma_2) Z_2 + (\tau_1 + \varkappa\tau_2) Z_3 &= 0 \end{aligned}$$

Unabhängig von der Wahl der Geraden gilt also die Gleichung (50).

Die kubischen Polkurven aller Geraden der Ebene bezüglich des Bündels erzeugen die kubische Polfläche der Ebene[1]).

**33. Ebenenbüschel und Flächenbüschel.** Die Koordinaten einer Ebene des Büschels $E' + \sigma E'' = 0$ seien:

$$u_1' + \sigma u_1'',\ u_2' + \sigma u_2'',\ u_3' + \sigma u_3'',\ u_4' + \sigma u_4''.$$

Zwischen den Koordinaten des Poles $P(x_i)$ dieser Ebene und den Koordinaten der Ebene besteht die Beziehung:

$$(53)\quad \begin{aligned} \rho (u_1' + \sigma u_1'') &= f_1 + \lambda g_1 \\ \rho (u_2' + \sigma u_2'') &= f_2 + \lambda g_2 \\ \rho (u_3' + \sigma u_3'') &= f_3 + \lambda g_3 \\ \rho (u_4' + \sigma u_4'') &= f_4 + \lambda g_4 \end{aligned}$$

sodass für variables $\lambda$ bei Elimination von

$$-\rho, -\rho\sigma, 1, \lambda$$

die Determinante besteht:

$$(54)\quad \begin{vmatrix} u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' & u_4'' \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Das ist die Gleichung des Polarhyperboloides der Achse des Ebenenbüschels. Die sämtlichen Raumkurven 3. O., die den $\infty^1$ Ebenen des Büschels entsprechen, erzeugen das Polarhyperboloid der Achse des Ebenenbüschels.

**34. Ebenenbüschel und Flächenbündel.** Bezüglich dreier Büschel des Bündels (1) sind dem Ebenenbüschel drei Polar-

[1]) Sturm, Fl. 3. O. S. 32.

hyperboloide zugeordnet, die sich in der kubischen Polkurve der Achse des Ebenenbüschels schneiden.

Gleichzeitig ist nach 8. jeder Ebene eine Fläche 3. O. zugeordnet, dem Büschel von Ebenen also ein Büschel von Flächen 3. O., die sich alle in der der Achse des Ebenenbüschels zugeordneten Polkurve 3. O. schneiden. Die kubische Polkurve ist mithin Schnitt eines Flächenbündels 2. O. und eines Flächenbüschels 3. O.

## Abschnitt II.

# Polarentheorie des Flächenbündels 2. O. der Raumkurve 3. O.

**1. Das Flächenbündel der Raumkurve 3. O.**[1]) Hatte das im I. Abschnitt betrachtete allgemeine Bündel nur acht Grundpunkte, die der Schnitt der drei Grundflächen waren, so hat dagegen das Flächenbündel, das der Gegenstand der nächsten Untersuchungen sein wird, $\infty^1$ Grundpunkte, die eine allgemeine Raumkurve 3. O. erfüllen.

Für die analytischen Untersuchungen kommen hier zwei Darstellungen der Raumkurve 3. O. und ihres Flächenbündels in Betracht.

Die erste gibt die Raumkurve auf ein Schmiegungstetraeder bezogen in einer kanonischen Parameterdarstellung:

$$(1) \quad \rho y_1 = \lambda_3,\ \rho y_2 = \lambda_2,\ \rho y_3 = \lambda,\ \rho y_4 = 1^2).$$

und die Grundflächen des Bündels mit den Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} f = y_2 y_4 - y_3^2 = 0 \\ g = y_2 y_3 - y_1 y_4 = 0 \\ h = y_1 y_3 - y_2^2 = 0.^3) \end{cases}$$

In der zweiten Form ist die Raumkurve auf ein Haupttetraeder bezogen:

[1]) Enz. d. math. Wiss. III., 2,2 Nr. 133; Geiser, J. f. Math. 69 (1868) p. 215; Sturm, J. f. Math. 70 (1869) p. 238; ders. Fl. 3. O. Nr. 48; Cardinaal, J. f. Math. 101 (1887) p. 142; Reye, G. d. L. 2. p. 22; Sturm, Geom Verw. IV. p. 408; Drach, Kub. Kegelschn. [2]) Staude III. S. 149 gibt Literatur. [3]) Cremona, Ann. di. mat. 1 (1858) S. 279. (cf. Staude III. S. 184).

$$3)\quad \begin{cases} x_1 = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)^{1)} \\ x_2 = -(\lambda+3)(\lambda+1) \\ x_3 = (\lambda-3)(\lambda-1) \\ x_4 = -(\lambda-1)(\lambda+1) \end{cases}$$

und die Gleichungen der Grundflächen lauten jetzt:

$$4)\quad \begin{cases} f & x_2x_3 + (x_2 - x_3)x_4 + 3x_4^2 = 0^{2)} \\ g & -x_3x_1 + (x_3 - x_1)x_4 + 3x_4^2 = 0 \\ h & -x_1x_2 + (x_1 - x_2)x_4 + 3x_4^2 = 0 \end{cases}$$

Diese letzte Form hat den Vorteil, dass die Gleichungen der Bündelflächen symmetrisch sind und durch cyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 auseinander hervorgehen. Da im Folgenden fast stets nur die Gleichungen der Bündelflächen, nicht die der Raumkurve benutzt wird, ist die 2. Form die für die Rechnung brauchbarere.

Sind nun $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$
die drei Grundflächen, so lautet die Bündelgleichung

$$(5)\quad \alpha f + \beta g + \gamma h = 0.$$

**2. Die Polarebenen eines Punktes.** Die partiellen Differentialquotienten von f, g und h lauten:

$$f_1 = 0 \qquad g_1 = x_3 - x_4 \qquad h_1 = x_2 + x_4$$
$$f_2 = x_3 + x_4 \qquad g_2 = 0 \qquad h_2 = x_1 - x_4$$
$$f_3 = x_2 - x_4 \qquad g_3 = x_1 + x_4 \qquad h_3 = 0$$
$$f_4 = (x_2 - x_3) + 6x_4 \quad g_4 = (x_3 - x_1) + 6x_4 \quad h_4 = (x_1 - x_2) + 6x_4$$

Daher haben die Polarebenen des Punktes $P'(x_i')$ die Gleichungen

$$(6)\quad \begin{cases} (x_3' + x_4')x_2 + (x_2' - x_4')x_3 + (x_2' - x_3' + 6x_4')x_1 = 0 \\ (x_3' - x_4')x_1 + (x_1' + x_4')x_3 + (x_3' - x_1' + 6x_4')x_4 = 0 \\ (x_2' + x_4')x_1 + (x_1' - x_4')x_2 + (x_1' - x_2' + 6x_4')x_4 = 0 \end{cases}$$

**3. Der Schnittpunkt der drei Polarebenen** oder der konjugierte Punkt[3]) $P''(x_i'')$ des Punktes $P'(x_i')$ hat die Koordinaten:

$$x_1'' : x_2'' : x_3'' : x_4'' \qquad \begin{matrix} x_3' + x_4' & x_2' - x_4' & x_2' - x_3' + 6x_4' \\ 0 & x_1' + x_4' & x_3' - x_1' + 6x_4' \\ x_1' - x_4' & 0 & x_1' - x_2' + 6x_4' \end{matrix}$$

$$: \begin{vmatrix} x_2' - x_4' & 0 & x_2' - x_3' + 6x_4' \\ x_1' + x_4' & x_3' - x_4' & x_3' - x_1' + 6x_4' \\ 0 & x_2' + x_4' & x_1' - x_2' + 6x_4' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & x_3' + x_4' & x_2' - x_3' + 6x_4' \\ x_3' - x_4' & 0 & x_3' - x_1' + 6x_4' \\ x_2' + x_4' & x_1' - x_4' & x_1' - x_2' + 6x_4' \end{vmatrix}$$

[1]) Staude III, § 34,8. [2]) Staude III. § 34 (33). [3]) Reye, Hamb. Mitt. 1890 S. 52; Reye, G. d. L. II. S. 218.

$$:= \begin{vmatrix} 0 & x_3' + x_4' & x_2' - x_1' \\ x_3' - x_4' & 0 & x_1' + x_4' \\ x_2' + x_4' & x_1' - x_4' & 0 \end{vmatrix}$$

Die Ausrechnung dieser Determinanten ergibt für die einzelnen Koordinaten die Werte:

$$\rho x_1'' = 2 x_1' \{ - x_1' (x_2' - x_3') + (x_2' + x_3') x_4' - 2 x_1' x_4' \}$$
$$+ 2 x_4' \{ 2 x_1' x_2' + x_3' ) - 3 (x_2' - x_3') x_4' - x_2' x_3' + 9 x_4'^2 \}$$

$\rho x_2''$ und $\rho x_3''$ ergeben sich hieraus durch zyklische Vertauschung. Die 4te Koordinate wird:

$$(7) \quad \rho x_4'' = - 2 x_1' x_2' x_3' - 2 (x_1' + x_2' + x_3') x_4'^2.$$

Um diese Ausdrücke in den Grössen f, g, h schreiben zu können, berechnet man die Hülfsausdrücke:

$$g - h = - x_1 x_2 - x_3) + (x_2 + x_3) x_1 - 2 x_1 x_1$$
$$2 g + 2 h - f = 2 x_1 (x_2 + x_3) - 3 (x_2 - x_3) x_4 - x_2 x_3 + 9 x_4^2$$
$$f x_1 + g x_2 + h x_3 = 3 x_1 x_2 x_3 + 3 (x_1 + x_2 + x_3) x_4^2$$

Unter Anwendung dieser Formeln und derer, die sich aus den beiden ersten durch zyklische Vertauschung von $x_1 x_2 x_3$) ergeben, gelangt man für die Koordinaten von P″ zu den Formeln:

$$(8) \quad \left| \begin{array}{l} \rho x_1'' = (g' - h') x_1' + (2 g' + 2 h' - f') x_4' \\ \rho x_2'' = (h' - f') x_2' + (2 h' + 2 f' - g') x_4' \\ \rho x_3'' = (f' - g') x_3' + (2 f' + 2 g' - h') x_4' \\ \rho x_4'' = - \frac{1}{3} \{ f' x_1' + g' x_2' + h' x_3' \} \end{array} \right.$$

Zwischen den Koordinaten konjugierter Punkte P′ und P″ bestehen die Formeln (8).

**4. Ort der konjugierten Punkte aller Punkte einer Ebene**[1]. Dem Begriff des Haupttetraeders gemäss ist die Ebene

$$(9) \quad x_4 = 0$$

als die Ebene, an die sich das Tetraeder anlehnt, eine völlig beliebige Ebene. Zur Bestimmung des Ortes der konjugierten Punkte aller Punkte P ($x_i$) einer Ebene ist also die Ebene (9) durchaus geeignet. Indem man in ihre Gleichung für die Koordinaten $x_i$ die des konjugierten Punktes P′ einsetzt, lautet die Gleichung des gesuchten Ortes mit Unterdrückung des Akzentes:

$$(10) \quad f x_1 + g x_2 + h x_3 = 0$$

oder, wie früher (7)

$$(11) \quad x_1 x_2 x_3 + (x_1 + x_2 + x_3) x_4^2 = 0.$$

[1]) Sturm, Geom. Verw. IV. 410; Sturm, J. f. Math. 70 (1869) p. 240; ders. Fl. 3. O. Nr. 120; Reye, Hbg. Festschr. 1890 S. 53; Reye, G. d. L. II. S. 220.

Der Ort der zu den Punkten der Ebene $x_4 = 0$ konjugierten Punkte ist die Fläche 3. O. (11).

Wir nennen die Fläche 3. O., die die konjugierten Punkte der Punkte einer Ebene enthält, die polare Fläche 3. O. oder die kubische Polfläche der Ebene (vgl. **I, 8.**).

**5. Geraden auf der Fläche 3. O.**[1]). Die Fläche enthält die Geraden:

$$(12)\quad \begin{cases} x_1 = 0, & x_4 = 0 \\ x_2 = 0, & x_4 = 0 \\ x_3 = 0, & x_4 = 0 \end{cases}$$

die nach der Definition und Lage des Haupttetraeders mit der kubischen Raumkurve (3) bezüglich die Punkte gemeinsam haben:

$$\lambda = 1, \quad \lambda = -1$$
$$\lambda = -1, \lambda = \infty$$
$$\lambda = \infty, \quad \lambda = 1$$

mithin die Sehnen der Raumkurve sind, die auf der Ebene $x_4 = 0$ liegen.

Ferner enthält die Fläche 3. O. die Geraden

$$(13)\quad \begin{cases} x_1 = 0, & x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0, & x_3 + x_1 = 0 \\ x_3 = 0, & x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

die alle drei in der Ebene

$$(14)\quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

liegen, die zu der Ebene $x_4 = 0$ konjugiert ist, und alle durch den Pol dieser Ebene (14) gehen[2]).

Wie man sich durch Rechnung überzeugen kann, ist die Gleichung der Fläche (11) auch erfüllt für die Gleichungen der drei in den Punkten

$$\lambda = \infty, 1, -1,$$

an die Raumkurve legbaren Tangenten

$$(15)\quad \begin{cases} \lambda = \infty & : x_2 + x_4 = 0, \; x_3 - x_4 = 0 \\ \lambda = 1 & : x_3 + x_4 = 0, \; x_1 - x_4 = 0 \\ \lambda = -1 & : x_1 + x_4 = 0, \; x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$[3]).

Damit ist die Anzahl der Geraden auf der kubischen Polfläche der Ebene $x_4 = 0$ noch nicht erschöpft. Da die Fläche der

[1]) Die Fläche 3. O. mit 3 Doppelpunkten und 12 Geraden wird behandelt in der Anm. 1 Seite 31 gegebenen Literatur, ferner bei G. Salmon, Camb. and Dubl. Math. J. IV. p. 256. [2]) Staude, III, § 34, 10. [3]) Staude, III, § 34, (20) angewandt auf die Formeln § 25 (2).

Ort aller Pole der Ebene bezüglich aller Bündelflächen ist, so muss auch die harmonische Polare der Ebene $x_4 = 0$ in bezug auf die drei Kegel des Bündels, durch deren Spitzen sie geht, auf der kubischen Polfläche liegen. Diese drei Kegel sind aber die Grundflächen des Bündels

$$f = 0,\ g = 0,\ h = 0.$$

Die harmonische Polare der Ebene $x_4 = 0$ in bezug auf die Fläche $f = 0$ ist der Schnitt der Polarebenen dreier Punkte $P'\ P''\ P'''$ der Ebene $x_4 = 0$:

$$(16)\quad \begin{cases} x_3' x_2 + x_2' x_3 + (x_2' - x_3') x_4 = 0 \\ x_3'' x_2 + x_2'' x_3 + (x_2'' - x_3'') x_4 = 0 \\ x_3''' x_2 + x_2''' x_3 + (x_2''' - x_3''') x_4 = 0; \end{cases}$$

oder anders geordnet:

$$(17)\quad \begin{cases} x_2' (x_3 + x_4) + x_3' (x_2 - x_4) = 0 \\ x_2'' (x_3 + x_4) + x_3'' (x_2 - x_4) = 0 \\ x_2''' (x_3 + x_4) + x_3''' (x_2 - x_4) = 0; \end{cases}$$

der Schnitt dieser drei Ebenen ist aber die Gerade

$$x_2 - x_4 = 0,\ x_3 + x_4 = 0.$$

Analog werden die anderen harmonischen Polaren gefunden. Die Gleichungen der Geraden dieses vierten Geradentripels auf der kubischen Polfläche sind:

$$(18)\quad \begin{cases} x_2 - x_4 = 0,\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0,\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0,\ x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Auf der kubischen Polfläche (11) der Ebene $x_4 = 0$ liegen die zwölf Geraden (12), (13), (15), (18).

**6. Doppelpunkte auf der Fläche.** Die Bedingungen für Doppelpunkte auf der Fläche (11) lauten

$$(19)\quad \begin{cases} x_2 x_3 + x_4^2 = 0 \\ x_3 x_1 + x_4^2 = 0 \\ x_1 x_2 + x_4^2 = 0 \\ 2 (x_1 + x_2 + x_3) x_4 = 0 \end{cases}$$

Die Fläche (11) hat daher die drei Doppelpunkte

$$(20)\quad \begin{cases} x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0 \\ x_3 = 0,\ x_1 = 0,\ x_4 = 0 \\ x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_4 = 0 \end{cases}$$

das sind die drei Punkte

$$\lambda = \infty,\ \lambda = 1,\ \lambda = -1$$

in denen die Ebene $x_4 = 0$ die Raumkurve (3) trifft.

Die kubische Polfläche einer Ebene hat die drei Schnittpunkte der Ebene mit der Grundkurve 3. O. des Bündels zu Doppelpunkten[1]).

**7. Doppelpunkte auf der kubischen Polfläche einer Schmiegungsebene der Raumkurve 3. O.** Die Schmiegungsebene im Punkte $\lambda = \infty$ der kubischen Raumkurve, die hier als Beispiel betrachtet werde, hat die Gleichung[2])

$$(21) \quad x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$

Die kubische Polfläche dieser Ebene erhält man, wenn man in die mit Akzenten versehene Gleichung (21) die Grössen (8) einführt:

$$\begin{aligned}(22)\ & x_2\{-x_2(x_3-x_1)+(x_3+x_1)x_4-2x_2x_4\}\\ & +x_4\{2x_2(x_3+x_1)-3(x_3-x_1)x_4-x_3x_1+9x_4^2\}\\ & -x_3\{-x_3(x_1-x_2)+(x_1+x_2)x_4-2x_3x_4\}\\ & -x_4\{2x_3(x_1-x_2)-3(x_1-x_2)x_4-x_1x_2-9x_1^2\}\\ & -2x_1x_2x_3-2(x_1+x_2+x_3)x_4^2=0\end{aligned}$$

Differenziert man diese Gleichung nach $x_1$, so resultiert als Bedingung für einen Doppelpunkt:

$$(23) \quad (x_2-x_3)^2+4x_4(x_2-x_3+x_4)=0$$

Diese Bedingung ist erfüllt für alle Punkte der Geraden:

$$(24) \quad x_2-x_3=0,\quad x_4=0,$$

die identisch ist mit der Tangente im Punkte $\lambda = \infty$:

$$(25) \quad x_2+x_4=0,\quad x_3-x_4=0.$$

Da diese Tangente auf der Ebene (21) liegt, so gilt der Satz:

Die Tangente auf der Schmiegungsebene ist Doppelpunktsgerade der kubische Polfläche der Schmiegungsebene[3]).

Auf die kubische Polfläche einer Schmiegungsebene soll in Art. **41.** dieses Abschnittes noch weiter eingegangen werden.

**8. Der Ort der konjugierten Punkte der Punkte einer Geraden.** Zur Bestimmung dieses Ortes und für die nächsten sich anschliessenden Betrachtungen diene einstweilen die Darstellung (1) der Raumkurve und ihres Bündels (2). Es wird sich später Gelegenheit finden, auf die Darstellung (3) und (4) zurückzukommen.

[1]) Reye, Hamb. Mitt. II. 1890 S. 53. [2]) Staude, III. § 24, 9. gibt die Gleichung der allgemeinen Schmiegungsebene im Schmiegungstetraeder, die durch Anwendung der Formeln § 34 (20) in die hier gegebene übergeht. [3]) Reye, Hamb. Mitt. II 1890 S. 53.

Die durch die Punkte $P^{(1)}(y^{(1)})$ und $P^{(2)}(y^{(2)})$ gegebene Gerade hat die Gleichung

$$(26)\quad y_i = y_i{}^{(1)} + \tau y_i{}^{(2)} \quad (i = 1,2,3,4).$$

Der Punkt $P^{(1)}$ hat in bezug auf das Flächenbündel (2) einen konjugierten Punkt $P'$ mit den Koordinaten[1]):

$$(27)\quad \begin{cases} y_1{}^{(1)} = -2\,h' y_2' - g' y_1' \\ y_2{}^{(1)} = -\,h' y_3' + f' y_1' \\ y_3{}^{(1)} = f' y_2' - h' y_4' \\ y_4{}^{(1)} = 2\,f' y_3' + g' y_4' \end{cases}$$

Analoges gilt für den Punkt $P^{(2)}$. Um den Ort der konjugierten Punkte zu erhalten, setzt man die durch die $y^{(1)}$ resp. $y^{(2)}$ ausgedrückten Koordinaten $y'$ resp. $y''$ in die Gleichung (26) ein und erhält mit

$$y_i = y_i' + \tau y_i''$$

oder:

$$\begin{aligned} y_1 = {} & \{ -2\,h^{(1)} y_2{}^{(1)} - g^{(1)} y_1{}^{(1)} \} \\ & + \tau \{ -2\,(y_1{}^{(1)} y_3{}^{(2)} + y_1{}^{(2)} y_3{}^{(1)} - 2\,y_2{}^{(1)} y_2{}^{(2)})\, y_2{}^{(1)} - y_1{}^{(1)} \\ & \quad (y_2{}^{(1)} y_3{}^{(2)} + y_2{}^{(2)} y_3{}^{(1)} - y_1{}^{(1)} y_4{}^{(2)} - y_1{}^{(2)} y_4{}^{(1)}) \\ & \quad -2\,h^{(1)} y_2{}^{(2)} - g^{(1)} y_1{}^{(2)} \} \\ & \tau^2 \{ -2\,h^{(2)} y_2{}^{(1)} - g^{(2)} y_1{}^{(1)} - 2\,y_2{}^{(2)} (y_1{}^{(1)} y_3{}^{(2)} + y_1{}^{(2)} y_3{}^{(1)} \\ & \quad -2\,y_2{}^{(1)} y_2{}^{(2)}) - y_1{}^{(2)} (y_2{}^{(1)} y_3{}^{(2)} + y_2{}^{(2)} y_3{}^{(1)} - y_1{}^{(1)} y_4{}^{(2)} \\ & \quad - y_1{}^{(2)} y_4{}^{(1)}) \} \\ & + \tau^3 \{ -2\,h^{(2)} y_2{}^{(2)} - g^{(2)} y_1{}^{(2)} \} \end{aligned} \qquad (28)$$

und drei analog gebauten Ausdrücken für $y_2$, $y_3$, $y_4$ die Gleichung einer kubischen Raumkurve in Parameterdarstellung mit dem Parameter $\tau$.

Der Ort der konjugierten Punkte aller Punkte einer Geraden bezüglich des Flächenbündels der Raumkurve (1) ist eine Raumkurve 3. O.[2]) die „kubische Polkurve“[3]) der Geraden.

Als Ort der reziproken Polaren der Geraden erhält man ebenso wie in Abschnitt I, 6 die Sehnenkongruenz[4]) der kubischen Polkurve.

**9. Die Gerade als Transversale der Grundkurve des Bündels.** Hat die Gerade $P^{(1)}P^{(2)}$ mit der Grundkurve einen

[1]) Staude III, § 32, 5. [2]) Sturm, Geom. Verw. IV S. 408; Sturm, J. f. Math. 70 (1869) S. 239. Reye, Hamb. Mitt. II 1890 S. 52. [3]) Sturm (Fl. 3. O. S. 34) benutzt diese Bezeichnung in diesem Sinne (vgl. Absch. I Nr. 8). Reye (Hamb. Mitt. II 1890 S. 52) braucht sie in anderem Sinne. [4]) Reye, G. d. L. II S. 219.

Punkt, z. B. den Punkt $P^{(1)}$, gemeinsam, so sind für $P^{(1)}$ die Gleichungen erfüllt

$$f^{(1)} = 0,\ g^{(1)} = 0,\ h^{(1)} = 0.$$

Dann fällt in der Gleichung (28) das absolute Glied fort. Mit homogenen Parametern $\rho$, $\tau$ und einem Proportionalitätsfaktor $\sigma$ lässt sie sich schreiben:

$$\begin{aligned}\sigma y_1 = \rho^2 \{ &- 2\,(y_1^{(1)} y_3^{(2)} + y_1^{(2)} y_3^{(1)} - 2\, y_2^{(1)} y_2^{(2)})\, y_2^{(1)} - y_1^{(1)} \\ &(y_2^{(1)}\, y_3^{(2)} + y_2^{(2)}\, y_3^{(1)} - y_1^{(1)}\, y_4^{(2)} - y_1^{(2)}\, y_4^{(1)}) \} \\ + \tau\rho \{ &- 2\, h^{(2)} y_2^{(1)} - g^{(2)} y_1^{(1)} - 2\, y_2^{(2)} (y_1^{(1)} y_3^{(2)} + y_1^{(2)} y_3^{(1)} \\ &- 2 y_2^{(1)} y_2^{(2)}) - y_1^{(2)} (y_2^{(1)} y_3^{(2)} + y_2^{(2)} y_3^{(1)} - y_1^{(1)}\, y_4^{(2)} \\ &- y_1^{(2)}\, y_4^{(1)}) \} \\ + \tau^2 \{ &- 2\, h^{(2)}\, y_2^{(2)} - g^{(2)}\, y_1^{(2)} \}\end{aligned} \tag{29}$$

und analog für $\sigma y_2$, $\sigma y_3$, $\sigma y_4$.

Da dem Punkte $P^{(1)}$ als konjugiertes Element die ganze Tangente in ihm an die Grundkurve zugehört (vgl. Staude III § 32, 6), so kann man sagen:

Der Ort aller konjugierten Punkte der Punkte einer Transversalen der kubischen Grundkurve des Bündels ist eine zerfallende[1]) Raumkurve 3. O., nämlich die Tangente im Treffpunkte der Transversalen an die Grundkurve und der Kegelschnitt[2]) (29).

**10. Die Gerade als Sehne der Grundkurve.** Liegt ausser dem Punkte $P^{(1)}$ auch der Punkt $P^{(2)}$ der Geraden auf der Grundkurve, so geht wegen der dann erfüllten Gleichungen

$$f^{(1)} = f^{(2)} = 0,\ g^{(1)} = g^{(2)} = 0,\ h^{(1)} = h^{(2)} = 0$$

die Gleichung (28) über in eine Gleichung, die wiederum in homogenen Parametern geschrieben in diesen vom ersten Grade ist. Führt man statt der $y^{(1)}$ und $y^{(2)}$ die entsprechenden Potenzen von $\lambda_1$ und $\lambda_2$ ein (1), so lautet die Gleichung des gesuchten Ortes

$$\begin{aligned}\sigma y_1 &= \rho \lambda_1^3 (\lambda_1 - \lambda_2)^3 - \tau \lambda_2^3 (\lambda_1 - \lambda_2)^3 \\ \sigma y_2 &= \rho \lambda_1^2 (\lambda_1 - \lambda_2)^3 - \tau \lambda_2^2 (\lambda_1 - \lambda_2)^3 \\ \sigma y_3 &= \rho \lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2)^3 - \tau \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2)^3 \\ \sigma y_4 &= \rho (\lambda_1 - \lambda_2)^3 - \tau (\lambda_1 - \lambda_2)^3\end{aligned} \tag{30}$$

Den Ausdruck $(\lambda_1 - \lambda_2)^3$ zieht man in den Faktor $\sigma$, und erhält dann die Parameterdarstellung der Sehne $P^{(1)} P^{(2)}$ selber:

[1]) Reye, G. d. L. III. S. 134ff.; Reye. G. d. L. II. S. 219. [2]) Reye, Hamb. Mitt. II. 1890 S. 53. Geiser, J. f. Math. 69 (1868) S. 216.

$$(31)\quad \sigma y_1 = \rho\lambda_1^3 - \tau\lambda_2^3 \quad \sigma y_3 = \rho\lambda_1 - \tau\lambda_2$$
$$\sigma y_2 = \rho\lambda_1^2 - \tau\lambda_2^2 \quad \sigma y_4 = \rho - \tau.$$

Den Punkten $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ der Grundkurve ist je die ganze Tangente in ihnen an die Grundkurve konjugiert[1]).

Der Ort der konjugierten Punkte der Punkte einer Sehne der Grundkurve ist eine zerfallende Raumkurve 3. O., nämlich die Sehne selber und die Tangenten in ihren beiden Kurvenpunkten[2]).

Dies Resultat steht in Einklang mit dem Satze: Zwei konjugierte Punkte liegen stets auf derselben durch einen von ihnen bestimmten Sehne (vgl. Staude III. § 32,3).

**11. Die Gerade als Tangente.** Fallen die beiden Punkte $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ der Geraden auf der Grundkurve zusammen, so ist $\lambda_1 = \lambda_2$ und die Gleichung (31) geht über in

$$(32)\quad \sigma y_1 = \lambda_1^3, \quad \sigma y_2 = \lambda_1^2, \quad \sigma y_2 = \lambda_1, \quad \sigma y_4 = 1;$$

das ist aber der Punkt $P^{(1)}$ der Grundkurve selber.

**12. Ort der Punkte mit konjugierter Geraden.** Die Punkte, deren Polarebenen bezüglich aller Bündelflächen ein Ebenenbüschel bilden, sind die Punkte der kubischen Grundkurve des Flächenbündels (vgl. Staude III. § 32, 6 I. und II.), und zwar sind die konjugierten Elemente der Punkte oder die Achsen der Büschel ihrer Polarebenen die Tangenten in den betreffenden Punkten. Dieselbe Kurve ist auch der Ort der Spitzen aller im Bündel enthaltenen Kegel[1]). (vgl Staude III. § 31, 4 II).

Die Kernkurve des Flächenbündels einer Raumkurve 3. O. ist diese Raumkurve selbst[3]).

Die Kernkurve 6. O. des allgemeinen Bündels (Abschn. I, **20**) wird in diesem speziellen Bündel zu einer zweifachen Raumkurve 3. O.[5]).

**13. Die Erzeugenden der Bündelflächen.** Die beiden Scharen von Erzeugenden auf einer Bündelfläche bestehen aus Sehnen und Treffgeraden der kubischen Grundkurve[6]). Der

[1]) vgl. Staude, III. § 32,6. [2]) Reye, G. d. L. III. S. 134 ff. [3]) Sturm, Geom. Verw. IV. S. 408; Geiser, J. f. Math. 69 (1868) S. 197. [4]) Sturm, J. f. Math. 70. (1869) S. 218; Sturm, Fl. 3. O. S. 34. [5]) Sturm, Geom. Verw. IV. S. 408. [6]) G. Salmon, Camb. Dubl. math. J. 5 (1850) S. 38; vgl. Staude III, S. 190.

Komplex 3. O. der Erzeugenden der Flächen im allgemeinen Bündel wird also hier identisch mit dem Komplex 3. O. aller Treffgeraden der Grundkurve[1]).

**14. Die Gleichung des Komplexes 3. O.** der Erzeugenden der Bündelflächen kann erhalten werden, indem man in der Gleichung des Komplexes des allgemeinen Bündels die Determinanten **I, 16.**

$$(\alpha\beta, \gamma\delta, \varepsilon\eta)$$

für die drei Flächen (4) berechnet und einsetzt.

Die Matrix der Koëffizienten lautet:

$$(33)\quad \left\| \begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right\|$$

und die Berechnung ihrer Determinanten liefert:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (44,23,31) = | 6 | (23,31,24) = | — 1 |
| (44,23,12) = | — 6 | (23,12,14) = | 1 |
| (44,23,14) = | — 12 | (23,12,34) = | — 1 |
| (44,23,24) = | 6 | (23,14,24) = | 1 |
| (44,23,34) = | 6 | (23,14,34 = | — 1 |
| (44,31,12) = | 6 | (23,24,34) = | 1 |
| (44,31,14) = | 6 | (31,12,24) = | 1 |
| (44,31,24) = | — 12 | (31,12,34) = | — 1 |
| (44,31,34) = | 6 | (31,14,24) = | 1 |
| (44,12,14) = | 6 | (31,14,34) = | — 1 |
| (44,12,24) = | 6 | (31,24,34) = | 1 |
| (44,12,34) = | — 12 | (12,14,24) = | 1 |
| (23,31,12) = | 1 | (12,14,34) = | — 1 |
| (23,31,14) = | 1 | (12,24,34) = | 1 |

Alle anderen Determinanten verschwinden, oder aber sie treten in der Gleichung des allgemeinen Komplexes nicht auf.

Die Gleichung des Komplexes lautet mit diesen Koëffizienten:

$$(34)\quad \left| \begin{array}{l} p_{23}\, p_{31}\, p_{12} - p_{23}\, p_{14}\, (p_{31} + p_{12}) - p_{31}\, p_{24}\, (p_{23} + p_{12}) \\ - p_{12}\, p_{34}\, (p_{23} + p_{31}) - 18\, p_{14}\, p_{24}\, p_{34} \\ + (p_{23} + p_{31} + p_{12})\, (p_{24}\, p_{34} + p_{34}\, p_{14} + p_{14}\, p_{24}) \\ + 3 \{ p_{14}^2\, (p_{34} + p_{24} - p_{23}) + p_{24}^2\, (p_{34} + p_{14} - p_{31}) \\ \qquad + p_{34}^2\, (p_{14} + p_{24} - p_{12}) \} = 0 \end{array} \right.$$

Diese Gleichung ist völlig symmetrisch und geht bei Vertauschung der Indizes (1, 2, 3) in sich selbst über.

[1]) Lindemann, Vorles. Geom. Raum. (1891) S. 244, 248; vgl. Staude III. § 27, 2.

**15. Gleichung des Komplexes im Schmiegungstetraeder.** Die Gleichungen (2) der Bündelflächen führen unter Anwendung der Gleichung des allgemeinen Komplexes zu einer anderen Form der Gleichung des Komplexes. Die Koëffizientenmatrix lautet:

$$(35)\quad \left|\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

und die nicht verschwindenden Determinanten sind:

$$\begin{array}{ll} (22,33,23) = 4 & (33,31,14) = -2 \\ (22,33,14) = -4 & (23,31,24) = 1 \\ (22,14,24) = -2 & (31,14,24) = 1 \end{array}$$

Damit geht die Komplexgleichung in die Form über:

$$-p_{23}^3 - p_{21}\,p_{23}\,p_{34} + p_{24}^2\,p_{21} - p_{31}^2\,p_{34} + p_{31}\,p_{32}\,p_{24} - p_{21}\,p_{23}\,p_{34} + p_{43}\,p_{41}\,p_{12} = 0$$

oder:

$$(36)\quad p_{23}^3 + p_{24}^2\,p_{12} + p_{31}^2\,p_{34} + p_{23}\,p_{31}\,p_{24} - p_{12}\,p_{14}\,p_{34} - 2\,p_{23}\,p_{12}\,p_{34} = 0^{1}).$$

**16. Der Übergang von der Gleichung (24) zur Gleichung (23)** geschieht durch Transformation der Strahlenkoordinaten $p_{ik}$ im Schmiegungstetraeder auf $\pi_{ik}$ im Haupttetraeder vermittelst der Gleichungen (Staude III, § 34,7):

$$(37)\quad \left|\begin{array}{l} y_1 = 8x_1 - x_2 - x_3 \\ y_2 = -x_2 + x_3 + 6x_4 \\ y_3 = -x_2 - x_3 \\ y_4 = -x_2 + x_3 - 2x_4 \end{array}\right.$$

und der Formeln (Staude I, § 59 (1')).

Die hier zu benutzenden Transformationsformeln lauten:

$$(38)\quad \left|\begin{array}{l} p_{23} = 2\pi_{23} + 6\pi_{24} + 6\pi_{34} \\ p_{31} = 8\pi_{12} - 8\pi_{31} \\ p_{12} = -2\pi_{23} - 8\pi_{31} - 8\pi_{12} + 48\pi_{14} - 6\pi_{24} - 6\pi_{34} \\ p_{14} = -2\pi_{23} - 8\pi_{31} - 8\pi_{12} - 16\pi_{14} + 2\pi_{24} + 2\pi_{34} \\ p_{24} = 8\pi_{24} - 8\pi_{34} \\ p_{34} = -2\pi_{23} + 2\pi_{24} + 2\pi_{34}. \end{array}\right.$$

Diese Grössen $p_{ik}$ in die Gleichung (34) eingesetzt, liefern die Gleichung (36) des Komplexes 3. O., wovon man sich durch Rechnung überzeugen kann unter Berücksichtigung der Identität:

$$p_{23}\,p_{14} + p_{31}\,p_{24} + p_{12}\,p_{34} = 0$$

---

1) Lindemann, Vorles. Geom. Raum. S. 244, 248; Staude, III. § 27, 2.

**17. Die Tangentenfläche der kubischen Grundkurve.** Die Gleichungen einer Tangente im Punkte $\lambda$ der kubischen Grundkurve in Haupttetraederkoordinaten sind:

$$(39)\quad \begin{cases} -4x_1 + (\lambda-1)^2 x_2 + (\lambda^2 + 6\lambda - 3) x_4 = 0 \\ 4x_1 - (\lambda+1)^2 x_3 + (\lambda^2 - 6\lambda - 3) x_4 = 0 \end{cases}$$

oder anders geschrieben:

$$\begin{cases} \lambda^2 (x_2 + x_4) - 2\lambda (x_2 - 3x_4) + (-4x_1 + x_2 - 3x_4) = 0 \\ \lambda^2 (x_4 - x_3) - 2\lambda (x_3 + 3x_4) + (4x_1 - x_3 - 3x_4) = 0 \end{cases}$$

Hieraus folgt die Proportion:

$$1 : -2\lambda : \lambda^2 = A : B : C,$$

worin A, B, C gesetzt sind für:

$$(40)\quad \begin{cases} A = (x_2 + x_4)(x_3 + 3x_4) - (x_2 - 3x_4)(x_4 - x_3) \\ B = (-4x_1 + x_2 - 3x_4)(x_4 - x_3) - (x_2 + x_4)(4x_1 - x_3 - 3x_4) \\ C = (x_2 - 3x_4)(4x_1 - x_3 - 3x_4) - (x_3 + 3x_4)(-4x_1 + x_2 - 3x_4). \end{cases}$$

Werden die Abkürzungen Abschnitt II, (4) eingeführt, so gehen diese Ausdrücke über in folgende:

$$(41)\quad \begin{cases} A = 2f \\ B = 4\{g - h\} \\ C = 2\{2h + 2g - f\} \end{cases}$$

Die Gleichung der Tangentenfläche[1]) ist dann:

$$(42)\quad B^2 - 4AC = 0$$

oder nach (28):

$$(43)\quad \{g - h\}^2 - f\{2h + 2g - f\} = 0$$

oder auch symmetrisch in f, g, h:

$$(44)\quad f^2 + g^2 + h^2 - 2gh - 2hf - 2fg = 0$$

Die Tangentenfläche der kubischen Raumkurve hat in Koordinaten des Haupttetraeders die Gleichung (44). Diese ist wiederum völlig symmetrisch in $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$.

**18. Die Doppelpyramidengruppe.** Da nach Staude III § 214,14 die Gesamtheit der Gleichungen (4) bei den Substitutionen der Doppelpyramidengruppe

$$(45)\quad S_0 : x_1, x_2, x_3;\ S_1 : -x_1, -x_3, -x_2;\ S_2 : -x_3, -x_2, -x_1;$$
$$S_3 : -x_2, -x_1, -x_3;\ S_4 : x_2, x_3, x_1;\ S_5 : x_3, x_1, x_2$$

[1]) Staude bestimmt die Gleichung der Tangentenfläche im Schmiegungstetraeder auf dieselbe Weise (Staude III, § 25, 11). Chasles, Aperçu p. 406.

unverändert bleibt, so muss auch die in f, g, h oder $x_1\,x_2\,x_3\,x_4$ symmetrische Gleichung (44) bei den Substitutionen (45) sich nicht ändern:

Die Gleichung der Tangentenfläche in Koordinaten des Haupttetraeders ist invariant gegenüber den Substitutionen der Doppelpyramidengruppe (45).

Die Gleichung der kubischen Polfläche (11) einer Ebene ist ebenfalls symmetrisch in $x_1\,x_2\,x_3\,x_4$. Also gilt:

Die kubische Polfläche einer Ebene ist invariant bei allen Substitutionen der Gruppe (45).

Wendet man die Substitutionen (45) der Reihe nach auf die Strahlenkoordinaten $p_{ik}$ an, so erhält man eine neue Gruppe von Substitutionen:

(46) $s_0 : p_{23},\ p_{31},\ p_{12},\ p_{14},\ p_{24},\ p_{34},$

$s_1 : -p_{23},\ -p_{12},\ -p_{31},\ -p_{14},\ -p_{34},\ -p_{21}$

$s_2 : -p_{12},\ -p_{31},\ -p_{23},\ -p_{34},\ -p_{24},\ -p_{14}$

$s_3 : -p_{31},\ -p_{23},\ -p_{12},\ -p_{24},\ -p_{14},\ -p_{34}$

$s_4 : p_{31},\ p_{12},\ p_{23},\ p_{24},\ p_{34},\ p_{14}$

$s_5 : p_{12},\ p_{23},\ p_{31},\ p_{34},\ p_{14},\ p_{21}.$

Die Gleichung (34) des Komplexes 3. Grades ist invariant bei allen Substitutionen der Gruppe (46).

**19. Die kubische Verwandtschaft.** Die Formeln (8) stellen eine Transformation 3. Grades dar. Setzt man in der Gleichung einer Fläche (Kurve) von der n-ten Ordnung statt der Koordinaten $x$ des laufenden Punktes die Koordinaten $x'$ seines konjugierten Punktes und ersetzt diese wiederum durch die Ausdrücke (8) — wie das beispielsweise in **4.** und **8.** für Ebene und Gerade geschehen ist —, so erhält man eine Gleichung vom Grade 3n. Diese Gleichung stellt diejenige Fläche (Kurve) 3n-ter O. dar, die der ursprünglichen Fläche (Kurve) n-ter Ordnung mittelst der Transformationsformeln (8) zugeordnet ist. Da die Zusammengehörigkeit beider Flächen (Kurven) darin besteht, dass die Punkte der Fläche (Kurve) 3n-ter O. die Schnittpunkte der Polarebenen der einzelnen Punkte der Fläche (Kurve) n-ter O. bezüglich der $\infty^2$ Bündelflächen sind, so können wir hier von einer Polarverwandtschaft reden (vgl. Absch. I, **23**).

Das Bündel der Raumkurve 3. O. ist Träger einer kubischen Polarverwandtschaft[1]).

Wie wir die Raumkurve 3. O., die der Ort der konjugierten Punkte der Punkte einer Geraden, dieser Geraden also durch die Transformationsformeln (8) zugeordnet ist, die kubische Polkurve der Geraden (siehe 8) und die Fläche 3. O., die der Ort der konjugierten Punkte der Punkte einer Ebene ist, die kubische Polfläche der Ebene (siehe 4) nannten, so nennen wir allgemein die Fläche (Kurve) 3n-ter O., die einer Fläche (Kurve) n-ter O. mittelst der Formeln (8) zugeordnet ist, die Polfläche (Polkurve) 3-nter O. der Fläche (Kurve) n-ter O.

Da dem Schnitt 4 n-ter O. einer Fläche n-ter O. mit der Tangentenfläche 4. O. die kubische Grundkurve des Bündels entspricht, so gehen alle Polflächen durch die kubische Grundkurve.

Jede Polkurve 3n-ter Ordnung trifft die Grundkurve in 4n Punkten.

**20. Die Polfläche 6. O. einer Bündelfläche.** Eine beliebige Bündelfläche hat $\infty^1$ Sehnen der Grundkurve zu Erzeugenden. Die Polfläche der Bündelfläche besteht aus den $\infty^1$ kubischen Polkurven der Sehnen. Da diese in die Sehnen selber und die Tangenten in ihren Treffpunkten an die Grundkurve zerfallen, so zerfällt die Polfläche 6. O. einer Bündelfläche in die Bündelfläche selbst und die Tangentenfläche 4. O. der Grundkurve.

**21. Die Polfläche 9. O. der kubischen Polfläche einer Ebene.** Die der allgemeinen Ebene $x_1 \dots 0$ zugehörige kubische Polfläche hat die Gleichung (11)

$$x_1 x_2 x_3 + (x_1 + x_2 + x_3) x_4^2 \dots 0.$$

Führt man auf diese Gleichung die in **19.** angegebene Transformation aus, so resultiert die Gleichung 9. O.

$$(47)\ \{729 x_4^9 + 540 (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) - 216 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\} x_4^7$$
$$+ \{216 (x_2 x_3^2 - x_3 x_2^2 + x_3 x_1^2 - x_1 x_3^2 + x_1 x_2^2 - x_2 x_1^2)\} x_4^6$$
$$+ \{78 (x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 + x_1^2 x_2^2) - 80 (x_2 x_3^3 + x_3 x_2^3 + x_3 x_1^3 \dots x_1 x_3^3 \dots x_1 x_2^3 + x_2 x_1^3) \dots 16 (x_1^4 \dots x_2^4 + x_3^4) \dots 228 x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3)\} x_4^5$$

[1]) Sturm, Geom. Verw. IV. S. 408.

$$+\{32(x_2^4x_3 - x_3^4x_2 + x_3^4x_1 - x_1^4x_3 + x_1^4x_2 - x_2^4x_1) - 112(x_2^3x_3^3 - x_3^3x_2^3 - x_3^3x_1^3 + x_1^3x_3^3 + x_1^3x_2^3 - x_2^3x_1^3)\}x_4^4$$

$$+\{24(x_2^2x_3^4 + x_3^2x_2^4 + x_3^2x_1^4 + x_1^2x_3^4 + x_1^2x_2^4 + x_2^2x_1^4) - 48x_1x_2x_3(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 52(x_2^3x_3^3 + x_3^3x_1^3 + x_1^3x_2^3) - 36x_1x_2x_3(x_2x_3^3 + x_3x_2^3 + x_3x_1^3 + x_1x_3^3 + x_1x_2^3 + x_2x_1^3) - 48x_1^2x_2^2x_3^2\}x_4^3$$

$$+\{24x_1x_2x_3(x_2x_3^3 - x_3x_2^3 + x_3x_1^3 - x_1x_3^3 + x_1x_2^3 - x_2x_1^3) - 8(x_2^4x_3^3 - x_3^4x_2^3 - x_3^4x_1^3 + x_1^4x_3^3 + x_1^4x_2^3 - x_2^4x_1^3)\}x_4^2$$

$$+\{x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)\}^2x_4 = 0.$$

Von dieser Fläche 9. O. spaltet sich die Ebene $x_4 = 0$ ab. Dies war zu erwarten, weil die Beziehung zwischen konjugierten Punkten reziprok ist, die Ebene $x_4 = 0$ also zum Ort der konjugierten Punkte der Punkte ihrer Polfläche gehören muss.

Die übrig bleibende Gleichung 8. Grades bildet ein vollständiges Quadrat, und lautet als solches geschrieben

$$\begin{aligned}(48)\quad &\{(x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2x_3 - 2x_1x_2^2x_3 - 2x_1x_2x_3^2) \\ &+ x_4(x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^2x_1 + x_3x_1^2 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2) \\ &+ x_1^2(4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 10x_2x_3 - 10x_3x_1 - 10x_1x_2) \\ &- 27x_4^4\}^2 = 0.\end{aligned}$$

Führt man hierin die Symbole (4) f, g, h ein, so erhält man mit

$$(49)\quad \{f^2 + g^2 + h^2 - 2gh - 2hf - 2fg\}^2 = 0$$

das Quadrat der Gleichung der Tangentenfläche (44).

Die Polfläche 9. O. der kubischen Polfläche einer Ebene zerfällt in die Ebene selbst und die doppeltgenommene Tangentenfläche der kubischen Grundkurve des Bündels.

**22. Büschel im Bündel der Raumkurve.** Zwei beliebige Flächen des Bündels bestimmen ein Büschel von Flächen, die im Bündel enthalten sind. Die drei Büschel, die durch je zwei der drei Grundflächen des Bündels festgelegt werden

$$(50)\quad g + \lambda h = 0,\ h + \lambda f = 0,\ f + \lambda g = 0$$

nennen wir die drei Grundbüschel im Bündel.

Ein allgemeines Büschel im Bündel (5) hat die Gleichung

$$(51)\quad (\alpha_1 f + \beta_1 g + \gamma_1 h) + \lambda(\alpha_2 f + \beta_2 g + \gamma_2 h) = 0.$$

**23. Polarebenen eines Punktes bezüglich eines Büschels.** Ein Punkt $P_0(x_i^0)$ hat bezüglich der drei Grundflächen (4) die Polarebenen (vgl. 2).

$$X_0 = (x_3^0 + x_4^0)\,x_2 + (x_2^0 - x_4^0)\,x_3 + (x_2^0 - x_3^0 + 6\,x_4^0)\,x_4 = 0$$
(52) $$Y_0 = (x_3^0 - x_4^0)\,x_1 + (x_1^0 + x_4^0)\,x_3 + (x_3^0 - x_1^0 + 6\,x_4^0)\,x_4 = 0$$
$$Z_0 = (x_2^0 + x_4^0)\,x_1 + (x_1^0 - x_4^0)\,x_2 + (x_1^0 - x_2^0 + 6\,x_4^0)\,x_4 = 0$$

Bezüglich des Grundbüschels (50) $g + \lambda h = 0$ lautet die Gleichung seiner Polarebene

(53) $$(g_1^0 + \lambda h_1^0)\,x_1 + (g_2^0 + \lambda h_2^0)\,x_2 + (g_3^0 + \lambda h_3^0)\,x_3 + (g_4^0 + \lambda h_1^0)\,x_4 = 0$$

oder nach $\lambda$ geordnet

(54) $$Y_0 + \lambda Z_0 = 0.$$

Die $\infty^1$ Polarebenen bei variierendem $\lambda$ bilden ein Ebenenbüschel. Die Achse dieses Ebenenbüschels nennen wir wie in Abschnitt I, **24** die dem Punkte $P_0$ bezüglich des Büschels konjugierte Gerade.

Die dem Punkte $P_0$ bezüglich der drei Grundbüschel konjugierten Geraden sind die Achsen der drei Ebenenbüschel

(55) $$Y_0 + \lambda Z_0 = 0,\ Z_0 + \lambda X_0 = 0,\ X_0 + \lambda Y_0 = 0.$$

Die dem Punkte $P_0$ bezüglich des allgemeinen Büschels (51) im Bündel konjugierte Gerade ist die Achse des Ebenenbüschels

(56) $$\alpha_1 X_0 + \beta_1 Y_0 + \gamma_1 Z_0 + \lambda(\alpha_2 X_0 + \beta_2 Y_0 + \gamma_2 Z_0) = 0.$$

Alle dem Punkte $P_0$ bezüglich der $\infty^2$ Büschel im Bündel konjugierten Geraden gehen durch einen Punkt, den bezüglich des Bündels konjugierten Punkt von $P_0$.

**24. Ort der reziproken Polaren einer Geraden in bezug auf das Büschel.** Eine Gerade, die durch die Punkte $P'(x')$ und $P''(x'')$ gegeben ist, hat bezüglich der allgemeinen Fläche des Büschels (50)

$$g + \lambda h = 0$$

die reziproke Polare (vgl. Abschnitt I, **26**.)

(57) $$\begin{vmatrix} X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Wird $\lambda$ eliminiert, so resultiert als Ort aller reziproken Polaren bezüglich der Büschelflächen die Fläche 2. O.

(58) $$Y'Z'' - Z'Y''.$$

Diese Fläche heisst das Polarhyperboloid[1]) der Geraden bezüglich des Büschels (50).

Das Polarhyperboloid (58) hat, wenn man statt der Symbole (52) Y, Z die Koordinaten einführt, die Gleichung

[1]) Schröter, Fl. 2. O. S. 696.

(59) $\{(x_3' - x_4')x_1 + (x_1' + x_4')x_3 + (x_3' - x_1' + 6x_1')x_4\} \cdot \{(x_2'' + x_4'')x_1 + (x_1'' - x_4'')x_2 + x_1'' - x_2'' + 6x_4''\}x_4\} - \{(x_3'' - x_4'')x_1 + (x_1'' + x_4'')x_3 + (x_3'' - x_1'' + 6x_1'')x_4\}\{(x_2' - x_4')x_1 + x_1' - x_1'x_2 - x_1' - x_2' + 6x_1')x_4\} = 0.$

Die Ausrechnung dieser Gleichung liefert Ausdrücke wie

$$x_3' x_2'' - x_2' x_3'',$$

für die wir die Grössen $p_{ik}$, d. h. die Strahlenkoordinaten der Geraden P′ P″ einführen.

Die Polarhyperboloide bezüglich der drei Grundbüschel wollen wir die Grundpolarhyperboloide der Geraden nennen. Die Gleichungen der beiden Polarhyperboloide bezüglich der Büschel (50)

$$h + \lambda f = 0 \text{ und } f + \lambda g = 0$$

erhält man durch zyklische Vertauschung von 1, 2, 3 in der Gleichung (59).

Die Gerade P′ P″ hat die drei Grundpolarhyperboloide:

(60)
$$\left|\begin{array}{ll} H_1 & Y'Z'' - Z'Y'' = 0 \\ H_2 & -Z'X'' - X'Z'' = 0 \\ H_3 & X'Y'' - Y'X'' = 0 \end{array}\right| \text{ oder}$$

(61) $x_1^2(-p_{23} + p_{24} + p_{34}) + x_1 x_2 (p_{31} + p_{14} - p_{34}) + x_3 x_1 (p_{12} + p_{14} - p_{24}) + x_2 x_3 (-2p_{14}) + x_1 x_4 (p_{31} - p_{12} - 7p_{24} + 7p_{34}) + x_2 x_4 (p_{31} - 5p_{14} - p_{34}) + x_3 x_4 (-p_{12} + 5p_{14} + p_{24}) + x_1^2 (p_{23} + p_{31} + p_{12} - 12p_{14} + 6p_{24} + 6p_{34}) = H_1 = 0$

$x_2^2 (-p_{31} + p_{34} + p_{14}) + x_2 x_3 (p_{12} + p_{24} - p_{14}) + x_1 x_2 (p_{23} + p_{24} - p_{34}) + x_3 x_1 (-2p_{24}) + x_2 x_4 (p_{12} - p_{23} - 7p_{34} + 7p_{14}) + x_3 x_4 (p_{12} - p_{14} - 5p_{24}) + x_1 x_4 (-p_{23} + 5p_{24} + p_{34}) + x_4^2 (p_{23} + p_{31} + p_{12} + 6p_{14} - 12p_{24} + 6p_{34}) = H_2 = 0$

$x_3^2 (-p_{12} + p_{14} + p_{24}) + x_3 x_1 (p_{23} + p_{34} - p_{24}) + x_2 x_3 (p_{31} - p_{14} + p_{34}) + x_1 x_2 (-2p_{34}) + x_3 x_4 (p_{23} - p_{31} - 7p_{14} + 7p_{24}) + x_1 x_4 (p_{23} - p_{24} - 5p_{34}) + x_2 x_4 (-p_{31} + 5p_{34} + p_{14}) + x_1^2 (p_{23} + p_{31} + p_{12} + 6p_{14} + 6p_{24} - 12p_{34}) \quad H_3 = 0.$

Die 3 Hyperboloide schneiden sich in einer Raumkurve 3. O., der kubischen Polkurve der Geraden bezüglich des Bündels (vergl. Abschnitt I, 28.).

**25. Ort der konjugierten Geraden der Punkte einer Geraden.** Wie im Abschnitt I, **25** ist auch hier der Ort der konjugierten Geraden der Punkte $P(x' + \tau x'')$ der Geraden $P'P''$ in bezug auf das Büschel $g + \lambda h = 0$ das Hyperboloid (58).

Ein Polarhyperboloid einer Geraden bezüglich eines Büschels im Bündel der Raumkurve hat zu Erzeugendenscharen die reziproken Polaren der Geraden und die konjugierten Geraden ihrer Punkte.

**26. Das Bündel der Polarhyperboloide einer Geraden.** Wählt man statt der drei Grundbüschel im Bündel drei Büschel, die durch je zwei von drei beliebigen Bündelflächen bestimmt werden, so gehen die zugehörigen Polarhyperboloide einer Geraden durch die kubische Polkurve der Geraden bezüglich des Bündels. Da sich die Bezeichnungen des Beweises in Abschnitt I **28.** auch hier anwenden lassen, so gilt auch für dies spezielle Bündel der Satz:

Die Polarhyperboloide einer Geraden bezüglich der $\infty^2$ Büschel im Bündel der kubischen Raumkurve bilden ebenfalls ein Bündel mit einer kubischen Grundkurve, die die kubische Polkurve der Geraden bezüglich des Bündels ist.

Wie wir im folgenden sehen werden, sind hier Entartungen möglich. Schon in **9.**, **10.** und **11.** dieses Abschnittes zerfielen die kubischen Polkurven in Kegelschnitt und Gerade oder in drei Geraden. Entsprechend werden auch die Bündel der Flächen 2. O., deren Grundkurven sie sind. Besonderheiten im Zerfall der Flächen aufweisen, so dass wir unter den Polarflächen 2. O. auch entartete Flächen 2. O., wie Kegel und Ebenenpaar, finden werden.

**27. Ort der reziproken Polaren der Geraden bezüglich des Bündels.** Auch hier gelten die Sätze und Beweise des Abschnittes I, nur dass statt $X_0\, Y_0\, Z_0$ die Formeln (52) dieses Abschnittes zu setzen sind.

Die reziproke Polare der Geraden $P'P''$ bezüglich der allgemeinen Bündelfläche (5) ist der Schnitt der Ebenen

$$(62)\quad \begin{aligned} \alpha X' + \beta Y' + \gamma Z_1' &= 0 \\ \alpha X'' + \beta Y'' + \gamma Z'' &= 0. \end{aligned}$$

Eine reziproke Polare ist ausserdem der Schnitt zweier Polarhyperboloide, so weit er nicht die kubische Polkurve bildet. Denn zwei Bündelflächen schneiden sich in einer Sehne der Raumkurve 3. O., diese Sehnen sind aber die reziproken Polaren der Geraden.

**28. Die Polarhyperboloide einer Transversalen.** Eine allgemeine Transversale der Grundkurve ist die Gerade:

$$(63) \quad x_1 = 0, \; x_2 = 0$$

Ihre Polarhyperboloide haben nach (52) und (60) die Gleichungen:

$$(64) \quad \left| \begin{array}{l} H_1 \quad (x_1 + x_4)(x_1 - x_2 + 6x_4) \quad 0 \\ H_2 = (x_2 - x_4)(x_1 - x_2 + 6x_4) = 0 \\ H_3 = 2x_1 x_2 - x_3 x_1 - x_2 x_3 + 5x_1 x_4 - 5x_2 x_4 \\ \qquad\qquad + 12x_4^2 = 0. \end{array} \right.$$

$H_1$ und $H_2$ sind Ebenenpaare, deren Achsen beide in der Ebene

$$(65) \quad x_1 - x_2 + 6x_4 = 0$$

liegen, die diese Ebene also gemeinsam haben.

Die Gleichung der Tangente im Punkte $\lambda = -1$[1]) erfüllt sowohl diese beiden Gleichungen, wie die des Hyperboloides $H_3 = 0$.

Der den drei Flächen 2. O. gemeinsame Schnitt 3. O. zerfällt also in die Tangente im Treffpunkte der Transversalen und einen Kegelschnitt, der erzeugt wird durch den Schnitt der Ebene (65) mit $H_3$.

Der Kegel des Bündels der Raumkurve (3) mit der Spitze im Punkte $\lambda = -1$ ist der Kegel $h = 0$ in (4).

Die harmonische Polarebene der Transversalen bezüglich dieses Kegels geht durch die Spitze des Kegels und hat die Gleichung:

$$x_1 - x_2 + 6x_4 = 0,$$

d. i. die Ebene (65).

Die Polkurve einer Transversalen der kubischen Grundkurve besteht aus der Tangente im Treffpunkte der Transversalen und dem Kegelschnitt, den die Polarebene der Transversalen bezüglich des Kegels mit der Spitze im Treffpunkte aus dem Polarhyperboloid bezüglich des Büschels $f + \lambda g = 0$ herausschneidet.

[1]) vgl. Formeln (15).

Bestimmt man die Schnittpunkte der Ebene (65) mit der kubischen Grundkurve durch Einsetzen der Werte (3) in die Gleichung (65), so hat die resultierende Gleichung
$\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)+(\lambda+3)(\lambda-1)+6(\lambda-1)(\lambda+1)=0$
die drei Wurzeln

(66) $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-3+2\sqrt{3},\ \lambda_3=-3-2\sqrt{3}$

Setzt man diese Werte in die Gleichung ein, die man durch Verbindung der Gleichung (65) und $H_3=0$ erhält, so erkennt man, dass das Hyperboloid ebenfalls durch die drei Punkte (66) geht, dass also der Kegelschnitt, der der Transversale zugehört, durch die drei Punkte geht, in denen die Ebene (65) die Grundkurve schneidet[1]).

Die Transversale (63) liegt auf der Bündelfläche

(67) $f+g-2h=0.$

Der Kegelschnitt ist nun, wie die Rechnung zeigt, nicht nur Schnitt der Ebene (65) mit dem Hyperboloid $H_3=0$, sondern auch derselben Ebene mit der Fläche (67), ist also auch ein Teil des Schnittes 4. O. der beiden Flächen 2. O.

Die einer Transversalen der Grundkurve zugeordnete kubische Polkurve zerfällt in die Tangente in ihrem Treffpunkt und den Schnitt der harmonischen Polarebene der Transversalen in bezug auf den Kegel in ihrem Treffpunkt mit der Bündelfläche, auf der sie liegt[1]).

**29. Reziproke Polaren der Transversalen.** Der Schnitt der beiden Polarhyperboloide $H_1=0$ und $H_2=0$ enthält die reziproke Polare der Transversalen bezüglich der Fläche $h=0$, d. i. des Sehnenkegels im Punkte $\lambda=-1$ der Grundkurve. Die harmonische Polare ist die Ebene (65)

$$x_1-x_2+6x_4=0.$$

Bezüglich $g=0$ ist die reziproke Polare:

$$(68)\quad \begin{cases} x_1+x_4=0 \\ x_3-x_1+6x_4=0 \end{cases}$$

und endlich bezüglich $f=0$:

$$(69)\quad \begin{cases} x_2-x_4=0 \\ x_3-x_2+6x_4=0. \end{cases}$$

Da das Hyperboloid (64) $H_3=0$ sich auch schreiben lässt:

[1]) Geiser, J. f. Math. 69 (1868) S. 216.

(70) $(x_1 + x_4)(x_2 - x_3 + 6x_4) - (x - x_4)(x_3 - x_1 + 6x_4) = 0$

also die beiden Scharen von Erzeugenden besitzt:

$$\text{I} \quad \begin{cases} (x_1 + x_4) + \tau(x_2 - x_4) = 0 \\ (x_3 - x_1 + 6x_4 - \tau(x_2 - x_3 + 6x_4) = 0 \end{cases}$$

$$\text{II} \quad \begin{cases} (x_1 + x_4) - \sigma(x_3 - x_1 + 6x_4) = 0 \\ (x_2 - x_4) - \sigma(x_2 - x_3 + 6x_4) = 0, \end{cases}$$

so ist ersichtlich, dass die beiden Geraden (68) und (69) zur I. Schar des Hyperboloides gehören, während die Tangente in $\lambda = -1$:

$$(71) \quad x_1 + x_4 = 0, \; x_2 - x_4 = 0$$

eine Erzeugende der II. Schar ist.

Die beiden Geraden schneiden daher den Kegelschnitt auf dem Hyperboloid in einem Punkte und die Tangenten in einem Punkte, sind daher Sehnen der entarteten kubischen Raumkurve.

Bezüglich des Hyperboloides des Bündels der Grundkurve, auf dem die Transversale selbst liegt, (67)

$$f + g - 2h = 0,$$

ist sie zu sich selbst reziproke Polare. Auch sie kann als Sehne der entarteten Raumkurve aufgefasst werden, da sie diese in ihrem Doppelpunkt, nämlich dem Schnittpunkt der Tangente mit dem Kegelschnitt $x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$ schneidet.

Die reziproke Polare der Transversalen (63) bezüglich der allgemeinen Bündelfläche (5) ist nach Gleichung (62) der Schnitt der Ebenen

$$(72) \quad \begin{cases} \alpha(x_2 - x_4) + \beta(x_1 + x_4) = 0 \\ \alpha(x_2 - x_3 + 6x_4) + \beta(x_3 - x_1 + 6x_4) + \gamma(x_1 - x_2 + 6x_4) = 0 \end{cases}$$

Für variierende Parameter $\alpha, \beta, \gamma$ stellen diese beiden Gleichungen ein Ebenenbüschel durch die Tangente im Punkte $\lambda = -1$ und ein Ebenenbündel dar. Hat $\gamma$ einen festen Wert, so liefert jedes Paar $(\alpha, \beta)$ eine bestimmte Gerade, sodass $\infty^2$ reziproke Polaren vorhanden sind. Nur für $\alpha = \beta = 0$ erhält man eine harmonische Polare, die Ebene (65).

Jede reziproke Polare schneidet die Tangente, weil diese auf jeder Ebene des Büschels $(72_1)$ liegt.

Jede reziproke Polare, die in der Ebene (65) liegt, ist Erzeugende des Hyperboloids $H_3 = 0$ und Tangente des Kegelschnitts, der der Transversale polar zugehört.

**30. Reziproke Polaren durch den Doppelpunkt.** Fragt man, welche reziproken Polaren durch den Doppelpunkt

der entarteten kubischen Polkurve gehen, so ist aus (72) ersichtlich, dass die Gleichungen des Punktes

$$(73)\quad x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_4 = 0$$

von einer reziproken Polaren nur dann erfüllt werden, wenn in der zweiten Gleichung (72) der Koëffizient von $x_3$ verschwindet, wenn also gilt

$$\alpha = \beta.$$

Die reziproken Polaren bezüglich aller Flächen des Büschels

$$(74)\quad \alpha(f + g) + \gamma h = 0$$

gehen durch den Schnittpunkt der Tangente mit dem Kegelschnitt.

Die Grundflächen dieses Büschels sind

$$(75)\quad \begin{cases} f + g = x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_2 x_4 - x_1 x_4 + 6x_4^2 = 0 \\ h = x_1 x_2 + x_1 x_4 - x_2 x_4 + 3x_4^2 = 0 \end{cases}$$

Die Polarfläche 2. O. der Transversalen bezüglich dieses Büschels hat die Gleichung

$$(76)\quad (x_1 - x_2 - 6x_4)(x_1 - x_2) = 0.$$

Diese Fläche 2. O. besteht aus der Ebene des Kegelschnitts und der Ebene

$$(77)\quad x_1 + x_2 = 0.$$

Wie aus den Gleichungen (63) und (71) hervorgeht, ist diese Ebene die Verbindungsebene der Transversalen mit der Tangente. Sie schneidet den Kegelschnitt im Punkte (73) doppelt; die Achse des Ebenenpaares (76) ist somit Tangente der Kegelschnittes im Doppelpunkte der entarteten kubischen Polkurve.

Der Ort der reziproken Polaren einer Transversalen, die durch ihren Treffpunkt gehen, ist ihre harmonische Polare bezüglich des Sehnenkegels der Grundkurve, der seine Spitze in ihrem Treffpunkte hat, und die Ebene durch die Transversale und die Tangente in diesem Punkt.

**31. Das Polarflächenbündel der Transversale.** Das Bündel von Polarhyperboloiden hat nach den Formeln (64) die Gleichung

$$(78)\quad \lambda x_1^2 - \mu x_2^2 + 6(\lambda - \mu + 2\nu)x_4^2 - \nu x_2 x_3 - \nu x_3 x_1 + (-\lambda + \mu - 2\nu)x_1 x_2 + (7\lambda - \mu - 5\nu)x_1 x_4 + (-\lambda + 7\mu - 5\nu)x_2 x_4 = 0.$$

Die kubische Grundkurve dieses Bündels ist die kubische Polkurve der Transversalen. Wir haben hier ein Beispiel für

ein Flächenbündel 2. O., dessen kubische Grundkurve in einen Kegelschnitt und eine ihn in einem Punkte treffende Gerade zerfällt.

In diesem Bündel ist ein Büschel von Ebenenpaaren enthalten, dessen Gleichung aus (78) mit $\nu = 0$ resultiert:

$$(79)\quad (\lambda(x_1 + x_4) + \mu(x_2 - x_3))(x_1 - x_2 + 6x_4) = 0.$$

Die sämtlichen Ebenenpaare bestehen aus der Ebene des Kegelschnitts und einer Ebene des Büschels, das die Gerade als Achse hat, die zur Grundkurve des Bündels (78) gehört.

**32. Die kubische Polkurve einer Sehne.** Da die Ebene $x_1 = 0$ eine beliebige Ebene ist, die die Grundkurve des Bündels der Flächen (4) in den Punkten

$$\lambda = \infty, \quad -1, \quad -1$$

trifft, so sind die Verbindungslinien dieser drei Punkte, d. h. aber die Schnittlinien der Ebenen

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

mit der Ebene $x_4 = 0$ beliebige Sehnen der Grundkurve. Wir betrachten als Beispiel die Sehne $(\lambda = 1, \lambda = -1)$

$$(80)\quad x_1 = 0, \; x_4 = 0.$$

Ihre Polarhyperboloide bezüglich der drei Grundbüschel (50) sind nach den Formeln (52) und (60)

$$(81)\quad \begin{cases} H_1 = (x_1 + x_4)(x_1 - x_4) = 0 \\ H_2 = (x_2 - x_4)(x_1 - x_4) = 0 \\ H_3 = (x_1 + x_4)(x_3 + x_4) = 0. \end{cases}$$

Alle drei Gleichungen, die Ebenenpaare darstellen, sind erfüllt für die Gleichung (80) der Sehne.

Die Gleichungen der Tangenten der Grundkurve (3) in den Punkten $\lambda = 1$ und $\lambda = -1$ sind

$$(82)\quad \{x_3 + x_4 = 0, \; x_1 - x_4 = 0\} \text{ und}$$

$$(83)\quad \{x_1 - x_4 = 0, \; x_2 - x_4 = 0\}.$$

Auch diese Gleichungen erfüllen die Gleichungen (80).

Die kubische Polkurve der Sehne (80) besteht daher aus drei Geraden, der Sehne (80) selbst und den Tangenten in ihren Kurvenpunkten (82) und (83).

Dies Resultat bestätigt die in **10.** gefundenen Ergebnisse.

**33. Reziproke Polaren einer Sehne.** Die drei Polarflächen 2. O. (81) der Sehne (80) haben folgende gemeinsame Elemente:

$H_2$ und $H_3$ : die drei Geraden (80), (82), (83) und die Gerade

(84) $x_3 + x_4 = 0, \quad x_2 - x_4 = 0$

$H_3$ und $H_1$ : die Ebene $x_1 + x_4 = 0$

$H_1$ und $H_2$ : die Ebene $x_1 - x_4 = 0$.

Die reziproke Polare der Sehne bezüglich der Fläche $f = 0$ ist daher die Gerade (84), die sowohl die Tangente (82), wie die Tangente (83) schneidet.

Bezüglich des Kegels $g = 0$ hat die Sehne (80) als harmonische Polare die Ebene

(85) $x_1 + x_4 = 0$

und bezüglich des Kegels $h = 0$ die Ebene

(86) $x_1 - x_4 = 0$.

Beide Ebenen gehen durch die Sehne und durch je eine Tangente.

Die reziproke Polare bezüglich der allgemeinen Bündelfläche (5) ist der Schnitt der Ebenen

(87) $\begin{cases} \alpha(x_3 + x_4) + \gamma(x_1 - x_4) = 0 \\ \alpha(x_2 - x_4) + \beta(x_1 + x_4) = 0. \end{cases}$

Mit laufenden Parametern stellen beide Gleichungen Ebenenbüschel dar mit den Tangenten (82) und (83) als Achsen.

Für $\alpha = 0$ erhält man die Sehne selbst, weil diese auf allen Flächen des Büschels

(88) $\beta g + \gamma h = 0$

liegt, sich daher $\infty^1$ fach selbst reziprok ist.

Bezüglich des Büschels

(89) $\alpha f + \beta g + h) = 0$

hat die Sehne das Polarhyperboloid

(90) $(x_1 + x_4)(x_3 + x_4) - (x_1 - x_4)(x_2 - x_4) = 0$

auf dem die Geraden (80), (82), (83), (84) ein vollständiges räumliches Vierseit bilden.

Wenn man in den Gleichungen (87)

$$x_1 = 0, \quad x_4 = 0$$

einsetzt, so muss $\alpha = 0$ sein, da nicht auch

$$x_2 = x_3 = 0$$

sein darf, d. h. keine reziproke Polare schneidet die Sehne.

**34. Das Polarflächenbündel der Sehne.** Die drei Polarflächen 2. 0. (81) sind Grundflächen eines Flächenbündels mit einer kubischen Grundkurve, die in drei Geraden entartet. Die Gleichung des Bündels ist:

(91) $\lambda x_1^2 \quad (-\lambda + \mu \quad \nu) x_1^2 \cdot \nu x_3 x_1 \quad \mu x_1 x_2 \cdot (-\mu + \nu) x_1 x_4$
$- \mu x_2 x_1 + \nu x_3 x_1 - 0.$

Die Determinante der Koëffizienten ist

$$(92) \quad D = \tfrac{1}{4} \mu^2 \nu^2.$$

Wenn $\mu = 0$ oder $\nu = 0$ ist, verschwinden stets auch die Unterdeterminanten $D_{14}$ $D_{24}$ $D_{34}$ $D_{44}$. In dem Bündel gibt es also nur Hyperboloide und Ebenenpaare. Die Ebenenpaare bilden zwei Büschel im Bündel, und diese haben das Ebenenpaar durch die Sehne und die beiden Tangenten gemeinsam.

**35. Polarhyperboloide einer Tangente der Grundkurve.** Die Tangenten in den Punkten, in denen die allgemeine Ebene $x_4 = 0$ die kubische Raumkurve (3) schneidet, sind allgemeine Tangenten der Raumkurve. Wir nehmen als Beispiel die Tangente im Punkte $\lambda = 1$

$$(82) \quad x_3 + x_4 = 0, \; x_1 - x_4 = 0$$

(vgl. Staude III § 19, 8). Bezüglich der drei Grundbüschel hat die Tangente nach den Formeln (52) und (60) die Polarhyperboloide

$$(93) \quad \begin{cases} H_1 = (x_1 - x_4)(x_1 - x_3 - 2x_4) = 0 \\ H_2 = x_1 x_3 - 3 x_1 x_4 + 3 x_3 x_4 + 7 x_4^2 = 0 \\ H_3 = (x_3 + x_4)(x_1 - x_3 - 2x_4) = 0 \end{cases}$$

$H_1 = 0$ und $H_3 = 0$ sind Ebenenpaare, die ausser der Ebene

$$(94) \quad x_1 - x_3 - 2x_4 = 0$$

auch die Achse, die die Tangente (82) ist, gemeinsam haben. Die Fläche $H_2 = 0$ ist ein Kegel.

Die den drei Flächen (93) gemeinsame Raumkurve 3. O. ist kubische Polkurve der Tangente.

Es haben gemeinsam:

$H_2$ und $H_3$: 1. als Schnitt der Ebene $x_3 + x_4 = 0$ mit $H_2 = 0$ die Tangente (82) und die Sehne $x_3 = 0$, $x_4 = 0$,
2. als Schnitt der Ebene (94) mit $H_2 = 0$ die zweifache Tangente (82);

$H_3$ und $H_1$: die Ebene (94), also die Tangente (82) vierfach;

$H_1$ und $H_2$: 1. als Schnitt der Ebene $x_1 - x_4 = 0$ mit $H_2 = 0$ die Tangente (82) und die Sehne $x_1 = 0$, $x_4 = 0$,
2. als Schnitt der Ebene (94) mit $H_2 = 0$ die zweifache Tangente.

Die kubische Polkurve entartet demnach in eine dreifache Gerade, die Tangente (82).

**36. Reziproke Polaren der Tangente.** Die Schnitte der Flächen (93) enthalten die reziproken Polaren bezüglich der drei Flächen (4). Die reziproke Polare ist

bezüglich f = 0 die Sehne $\{ x_3 = 0, x_4 = 0 \}$
bezüglich h = 0 die Sehne $\{ x_1 = 0, x_4 = 0 \}$

Die harmonische Polare bezüglich g = 0 ist die Ebene (94). Die reziproke Polare bezüglich der allgemeinen Bündelfläche (5) ist der Schnitt der Ebenen

$$(95) \quad \alpha (x_3 - x_1) - \gamma (x_1 - x_4) = 0$$

$$(96) \quad \alpha (x_3 - 7 x_4) + 2\beta (x_1 - x_3 - 2 x_4) - \gamma (x_1 + 7 x_4) = 0,$$

also mit variierenden Parametern der Schnitt der Ebenen eines Büschels durch die Tangente mit den entsprechenden eines Bündels durch den Berührungspunkt $\lambda = 1$ der Tangente.

Alle reziproken Polaren gehen durch den Berührungspunkt der Tangente.

**37. Das Polarflächenbündel der Tangente.** Die drei Flächen (93) bestimmen ein Bündel von Flächen 2. O.

$$(97) \quad \lambda x_1^2 - \nu x_3^2 - (2\lambda - 7\mu - 2\nu) x_1^2 - (\mu - \nu - \lambda) x_3 x_1 + (\nu - 3\lambda - 3\mu) x_1 x_4 - (\lambda + 3\mu - 3\nu) x_3 x_4 = 0.$$

Alle diese Flächen 2. O. sind entartet. Wenn $\mu = 0$ ist, verschwinden sämtliche Unterdeterminanten der Koëffizientendeterminante. Das Bündel enthält also ein Büschel von Ebenenpaaren, die alle die Tangente als Achse und die Ebene (94) gemeinsam haben.

**38. Polarhyperboloide eines Schmiegungsstrahles.** Jede Gerade einer Schmiegungsebene, die durch den Kurvenpunkt in derselben geht, also jede Transversale der Grundkurve in einer Schmiegungsebene heisst ein Schmiegungsstrahl. Eine beliebige Schmiegungsebene ist diejenige im Punkte $\lambda = \infty$, ein beliebiger Schmiegungsstrahl ist also der Schnitt der allgemeinen Ebene $x_4 = 0$ mit dieser Schmiegungsebene. Die Gleichung dieser Ebene erhält man, wenn man auf die Gleichung im Schmiegungstetraeder (vgl. Staude III § 24, 9).

$$(98) \quad y_4 = 0$$

die Haupttetraedertransformation (siehe Staude III § 34, [20]) ausführt. Die Gleichung lautet dann

$$(99) \quad x_2 - x_3 + 2 x_4 = 0.$$

Der allgemeine Schmiegungsstrahl hat demnach die Gleichung

$$(100) \quad \{ x_2 - x_3 = 0,\ x_4 = 0 \}.$$

Bezüglich der drei Grundbüschel hat der Schmiegungsstrahl (100) die Polarhyperboloide

$$(101) \quad \begin{cases} H_1 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) - (x_1 - x_4)(x_3 - x_4) = 0 \\ H_2 = (x_2 + x_3)(x_2 + x_4) = 0 \\ H_3 = (x_2 + x_3)(x_3 - x_4) = 0. \end{cases}$$

Je zwei dieser Flächen 2. O. haben einen Schnitt 4. O., die Ebenenpaare $H_2 = 0$ und $H_3 = 0$ haben die Ebene

$$(102) \quad x_2 + x_3 = 0$$

und die Tangente im Punkte $\lambda = \infty$:

$$(103) \quad x_2 + x_4 = 0,\ x_3 - x_4 = 0$$

als Achse gemeinsam.

Ferner schneiden sich

$H_3$ und $H_1$ in: $\{ x_2 + x_4 = 0, x_3 - x_4 = 0 \}$
$\{ x_3 - x_4 = 0, x_1 + x_4 = 0 \}$
$\{ x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_4 = 0 \}$
$\{ x_2 + x_4 = 0, x_3 - x_4 = 0 \}$

$H_1$ und $H_2$ in: $\{ x_2 + x_4 = 0, x_3 - x_4 = 0 \}$
$\{ x_2 - x_4 = 0, x_1 - x_4 = 0 \}$
$\{ x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_4 = 0 \}$
$\{ x_2 + x_4 = 0, x_3 - x_4 = 0 \}$

Die Gerade $\{ x_1 = 0, x_2 + x_3 = 0 \}$ ist ein Schmiegungsstrahl in der Schmiegungsebene

$$(104) \quad 8 x_1 - (x_2 + x_3) = 0$$

(vgl. Staude III § 20, 8).

Da die Tangente (103) auch in der Ebene (102) liegt, schneidet sie den Schmiegungsstrahl $\{ x_1 = 0, x_2 + x_3 = 0 \}$.

Die kubische Polkurve eines Schmiegungsstrahles zerfällt daher in eine Doppelgerade, die Tangente in seinem Kurvenpunkt, und einen anderen Schmiegungsstrahl[1]), der die Tangente trifft.

[1]) Reye, Hbg. Mitt. II 1890 S. 53; Sturm, Geom. Verw. IV S. 409: (Die kubische Polkurve zerfällt in einen anderen Schmiegungsstrahl $s_2$, die Tangente $t_1$ im Treffpunkte und die von dem ersten Schmiegungsstrahl $s_1$ getroffene Tangente $t_2$) kommt zu einem von dem hier gefundenen abweichenden Resultat. Die beiden Schmiegungsstrahlen nennt er konjugiert. Nach 28. hat der Strahl $s_1$ als Polkurve die Tangente $t_1$ und den Kegelschnitt in der Ebene $x_2 + x_3 = 0$. In dieser Ebene liegen die Geraden $t_1$ und $s_2$, aber nicht die Tangente $t_2$.

**39. Reziproke Polaren des Schmiegungsstrahles.** Die reziproke Polare des Strahles (100) bezüglich der allgemeinen Bündelfläche ist der Schnitt der Ebenen

$$(105)\quad \begin{cases} \beta(x_3 - x_4) + \gamma(x_2 + x_4) = 0 \\ \alpha(x_2 + x_3) - \beta(x_1 + x_4) + \gamma(x_1 - x_4) = 0. \end{cases}$$

Mit veränderlichen Parametern bilden die Gleichungen das Ebenenbüschel durch die Tangente (103) und das Ebenenbündel durch den Punkt

$$(106)\quad x_1 = 0,\ x_4 = 0,\ x_2 + x_3 = 0.$$

Die harmonische Polare bezüglich des Sehnenkegels im Treffpunkte $(\lambda = \infty)$, $f = 0$ ist die Ebene (102).

Alle Polaren treffen die Tangente (103). Da diese Doppelgerade der kubischen Polkurve ist, lassen sich also alle Polaren als Sehnen der kubischen Polkurve auffassen.

Für alle Flächen des Bündels (5), für die

$$\beta = \gamma$$

ist, also für die $\infty^1$ Flächen des Büschels

$$(107)\quad \alpha f + \beta(g + h) = 0$$

ist der Schmiegungsstrahl

$$(108)\quad x_1 = 0,\ x_2 + x_3 = 0$$

die reziproke Polare.

Wird dieser Strahl (108) von anderen reziproken Polaren getroffen? Dann wird die Gleichung dieser Polare

$$\{(\beta - \gamma)x_4 = 0,\ (\beta - \gamma)(x_2 - x_3) = 0\}.$$

Dass $\beta - \gamma = 0$, ist ausgeschlossen, da dieser Fall den Strahl (108) selbst liefert. Da der zweite Fall $x_4 = 0$ und $x_2 = 0$ nicht möglich ist, wird der Strahl (108) von keiner anderen reziproken Polaren getroffen.

**40. Das Polarflächenbündel des Schmiegungsstrahles.** Die drei Flächen 2. O. (101) bestimmen das Bündel von Flächen 2. O., die eine Doppelgerade und eine sie schneidende Gerade als entartete kubische Grundkurve haben.

Die Gleichung des Bündels ist

$$(109)\quad \mu x_2^2 + \nu x_3^2 + \lambda x_1 x_2 - \lambda x_1 x_3 + (\mu + \nu) x_2 x_3 + 2\lambda x_1 x_4 + (\lambda + \mu - \nu) x_2 x_4 - (\lambda - \mu - \nu) x_3 x_4 = 0.$$

Die Determinante dieser Gleichung ist

$$(110)\quad D = \tfrac{1}{4}\lambda^4.$$

Die Fläche dieses Bündels entartet nur für

$$\lambda = 0$$

und zwar ist die Fläche, da dann auch alle Unterdeterminanten 3. Grades verschwinden, ein Ebenenpaar.

Das Bündel (109) enthält nur Hyperboloide und Ebenenpaare. Die letzteren bilden ein Büschel

$$(111)\quad (x_2 + x_3) \cdot [\mu (x_2 + x_4) + \nu (x_3 - x_4)] = 0$$

und haben die Tangente (103) als Achse und die Ebene (102) gemeinsam.

**41. Die kubische Polfläche einer Schmiegungsebene.** Wie wir in den letzten Paragraphen sahen, ist einem Schmiegungsstrahl stets ein anderer polar zugeordnet, in Verbindung mit der doppelten Tangente im Treffpunkte des ersten. In einer Schmiegungsebene liegen nun $\infty^1$ Schmiegungsstrahlen, deren kubische Polkurven alle auf der kubischen Polfläche der Schmiegungsebene liegen müssen. Daher liegen auf der kubischen Polfläche $\infty^1$ Geraden und die Tangente im Schmiegungspunkte als singuläre Gerade.

Um dies auch rechnerisch nachzuweisen, benutzt man zweckmässig die Darstellung im Schmiegungstetraeder, in dem die Ebene (98)

$$y_4 = 0$$

eine beliebige Schmiegungsebene der Raumkurve ist (vgl. Staude, III, § 28). Die Schmiegungsstrahlen in dieser Ebene haben [vgl. Staude, III § 27 (13)] die Gleichung

$$(112)\quad \{ y_2 : y_3 = \rho : \sigma = \varkappa,\ y_4 = 0 \},$$

worin $\varkappa$ ein laufender Parameter ist.

Die der Ebene (98) zugeordnete kubische Polfläche ist nach den Formeln (2) und (27) die Fläche

$$(113)\quad y_1 y_4^2 - 3 y_2 y_3 y_4 + 2 y_3^3 = 0.$$

Der laufende Schmiegungsstrahl (112) hat als kubische Polkurve den Schnitt der drei Polarhyperboloide bezüglich der Grundbüschel im Bündel der Flächen (2):

$$(114)\quad \begin{cases} H_1 = -y_1 y_4 + y_2 y_3 - \varkappa y_3^2 + 2\varkappa y_2 y_4 = 0 \\ H_2 = -y_3 (-\varkappa y_4 + 2 y_3) = 0 \\ H_3 = y_4 (2 y_3 - \varkappa y_4) = 0 \end{cases}$$

Die kubische Polkurve zerfällt in

1. die Tangente im Punkte $\lambda = \infty : y_3 = 0,\ y_4 = 0$
2. den Kegelschnitt

$$(115)\quad \begin{cases} 2 y_3 - \varkappa y_4 = 0 \\ \varkappa^2 y_3^2 - 3 \varkappa y_2 y_3 + 2 y_1 y_3 = 0, \end{cases}$$

der seinerseits wieder zerfällt in die Tangente

(116) $\{ y_3 = 0,\ y_4 = 0 \}$ und die Gerade

(117) $\{ zy_4 - 2y_3 = 0,\ z^2 y_3 - 3z y_2 + 2y_1 = 0 \}$.

Eliminiert man $z$ aus Gleichungen (117), so erhält man die Gleichung (113).

Die kubische Polfläche ist eine Regelfläche 3. O.[1]) Bildet man die vier ersten Differentialquotienten der Gleichung (113):

(118) $y_1^2 = 0,\ y_3 y_4 = 0,\ 2y_3^2 - y_2 y_4 = 0,\ 2y_1 y_4 - 3y_2 y_3 = 0,$

so sieht man, dass jeder Punkt der Tangente $\{ y_3 = 0,\ y_4 = 0 \}$ diese vier Gleichungen befriedigt.

Die Tangente im Schmiegungspunkt ist Doppelpunktsgerade der kubischen Polfläche einer Schmiegungsebene[2]).

**42. Kubische Polkurve einer Ebene bezüglich eines Büschels im Bündel der Raumkurve.[3])** Der Pol der Ebene $x_4 = 0$ ist bezüglich der allgemeinen Büschelfläche (51) der Schnitt der drei Ebenen

$$(119)\quad \begin{vmatrix} \gamma_1(x_2 - x_4) + \beta_1(x_3 - x_4) + \lambda\{\gamma_2(x_2 - x_4) + \beta_2(x_3 - x_4)\} = 0 \\ \alpha_1(x_3 + x_4) + \gamma_1(x_1 - x_4) + \lambda\{\alpha_2(x_3 + x_4) + \gamma_2(x_1 - x_4)\} = 0 \\ \beta_1(x_1 + x_4) + \alpha_1(x_2 - x_4) + \lambda\{\beta_2(x_1 + x_4) + \alpha_2(x_2 - x_4)\} = 0 \end{vmatrix}$$

Wird $\lambda$ eliminiert, so erhält man als kubische Polkurve der Ebene bezüglich des Büschels (51)

$$(120)\quad \begin{vmatrix} \gamma_1(x_2 + x_4) + \beta_1(x_3 - x_4) & \alpha_1(x_3 + x_4) + \gamma_1(x_1 - x_4) & \beta_1(x_1 + x_4) + \alpha_1(x_2 - x_4) \\ \gamma_2(x_2 + x_4) + \beta_2(x_3 - x_4) & \alpha_2(x_3 + x_4) + \gamma_2(x_1 - x_4) & \beta_2(x_1 + x_4) + \alpha_2(x_2 - x_4) \end{vmatrix} = 0$$

Diese Matrix lautet für das Büschel $f + \lambda g = 0$:

$$(121)\quad \begin{vmatrix} 0 & x_3 + x_4 & x_2 - x_4 \\ x_3 - x_4 & 0 & x_1 + x_4 \end{vmatrix} = 0$$

Die Flächen 2. O., die dieser Matrix entsprechen, haben die Gleichungen

$$(122)\quad \begin{vmatrix} G_1 = (x_3 + x_4)(x_1 + x_4) = 0 \\ G_2 = (x_2 - x_4)(x_3 - x_4) = 0 \\ G_3 = (x_3 + x_4)(x_1 - x_4) = 0. \end{vmatrix}$$

[1]) Sturm, Geom. Verw. IV. S. 410; Reye, Hamb. Mitt. II 1890 S. 53. [2]) Vgl. 7. Reye, Hamb. Mitt. II 1890 S. 53. [3]) Schröter, Fl. 2. O. S. 697; Sturm, J. f. Math. 70 (1869) S. 239.

Die den drei Flächen (122) gemeinsame Raumkurve 3. O. zerfällt in die Sehne $\{ x_3 = 0, x_1 = 0 \}$ und die beiden Geraden:

$$\{ x_2 - x_4 = 0, x_3 + x_4 = 0 \}$$
$$\{ x_3 - x_4 = 0, x_1 + x_4 = 0 \}$$

die die Grundkurve (3) in den Punkten $\lambda = \infty$, resp. $\lambda = 1$ treffen.

Wir haben hier ein Beispiel dafür, dass die kubische Polkurve einer Ebene bezüglich eines Büschels entartet.

**43. Die kubische Polfläche als Erzeugnis kubischer Polkurven.** Wenn man aus den Gleichungen (119) die Grössen $(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)$, $(\beta_1 + \lambda\beta_2)$, $(\gamma_1 + \lambda\gamma_2)$ eliminiert, so entsteht

$$(123) \quad \begin{vmatrix} 0 & x_3 - x_4 & x_2 + x_4 & 0 \\ x_3 + x_4 & 0 & x_1 - x_4 & \\ x_2 - x_4 & x_1 + x_4 & 0 & \end{vmatrix}$$

d. i. die Gleichung der kubischen Polfläche (11).

Die kubische Polfläche einer Ebene bezüglich des Flächenbündels einer Raumkurve enthält alle Polkurven der Ebene bezüglich der $\infty^2$ Büschel im Bündel[1]).

**44. Kubische Polkurven einer Schmiegungsebene.** In bezug auf das allgemeine Büschel im Bündel der Flächen (2) erhält man als kubische Polkurve der allgemeinen Schmiegungsebene $y_4 = 0$ den Schnitt der drei Hyperboloide, die in der Matrix

$$(124) \quad \begin{vmatrix} \gamma_1 y_3 - \beta_1 y_4 & \alpha_1 y_4 + \beta_1 y_3 - 2\gamma_1 y_2 & \gamma_1 y_1 + \beta_1 y_2 - 2\alpha_1 y_3 & = 0 \\ \gamma_2 y_3 - \beta_2 y_4 & \alpha_2 y_4 + \beta_2 y_3 - 2\gamma_2 y_2 & \gamma_2 y_1 + \beta_2 y_2 - 2\alpha_2 y_3 & \end{vmatrix}$$

enthalten sind.

Für das Büschel $f + \lambda g = 0$ lautet die Matrix

$$(125) \quad \begin{vmatrix} 0 & y_4 & -2y_3 & = 0 \\ -y_4 & y_3 & y_2 & \end{vmatrix}$$

Die drei Flächen 2. O. sind

$$(126) \quad G_1 = y_2 y_4 + 2y_3^2 = 0, \quad G_2 = y_3 y_4 = 0, \quad G_3 = y_4^2 = 0.$$

Die kubische Polkurve der Ebene $y_4 = 0$ ist als der Schnitt der Flächen (126) die dreifache Tangente im Schmiegungspunkt der Ebene.

[1]) vergl. Abschnitt I Nr. 32.

## Abschnitt III.

# Polarentheorie des Flächenbündels 2. O. der kubischen Hyperbel.

**1. Die kubische Hyperbel.** Die im zweiten Abschnitt ausgeführten Untersuchungen sollen eine Anwendung erfahren auf die kubische Hyperbel. Diese ist nach Staude III, § 19 und 20,5 in ihrem natürlichen Koordinatensystem gegeben als der Schnitt der drei hyperbolischen Zylinder:

$$(1)\quad \begin{cases} \left(\frac{y}{b}-1\right)\left(\frac{z}{c}-1\right)+4=0 \\ \left(\frac{z}{c}-1\right)\left(\frac{x}{a}+1\right)-4=0 \\ \left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{y}{b}-1\right)-4=0 \end{cases}$$

die in homogener Form analog Abschn. II (4) sich schreiben lassen:

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{y}{b}\frac{z}{c}+\frac{y}{b}t-\frac{z}{c}t+3t^2=0=f \\ \frac{z}{c}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}t-\frac{x}{a}t+3t^2=0=g \\ \frac{x}{a}\frac{y}{b}+\frac{x}{a}t-\frac{y}{b}t+3t^2=0=h. \end{cases}$$

Wie aus der Form dieser Gleichungen hervorgeht, gestattet diese Raumkurve eine ganz besonders einfache Anwendung, da die im II. Abschnitt gefundenen Formeln durch Substitution von $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}, t$ statt $x_1, x_2, x_3, x_4$ in diejenigen übergehen, die für die kubische Hyperbel Gültigkeit haben.

**2. Konjugierte Punkte.** Zwischen den Koordinaten eines Punktes P′ und den des ihm bezüglich des Bündels der Flächen 1 konjugierten Punktes P″ bestehen, analog Absch. II (8) die Formeln:

$$(3)\quad \begin{cases} \rho x'' = \dfrac{2}{bc}\left\{(g'-h')\dfrac{x'}{a} + (2g'+2h'-f')t'\right\} \\ \rho y'' = \dfrac{2}{ac}\left\{(h'-f')\dfrac{y'}{b} + (2h'+2f'-g')t'\right\} \\ \rho z'' = \dfrac{2}{ab}\left\{(f'-g')\dfrac{z'}{c} + (2f'+2g'-h')t'\right\} \\ \rho t'' = -\dfrac{1}{3}\left\{f'\cdot\dfrac{x'}{a}+g'\cdot\dfrac{y'}{b}+h'\cdot\dfrac{z'}{c}\right\} \\ \qquad\qquad = -\dfrac{2}{abc}\left\{\dfrac{x'}{a}\cdot\dfrac{y'}{b}\cdot\dfrac{z'}{c} + \left(\dfrac{x'}{a}+\dfrac{y'}{b}+\dfrac{z'}{c}\right)t'^2\right\} \end{cases}$$

**3. Ort der konjugierten Punkte einer Ebene.** Entsprechend Abschn. II, 4, werde die unendlich ferne Ebene

$$(4)\quad t = 0$$

zu Grunde gelegt. Ihre kubische Polfläche ist die Fläche 3. O.:

$$(5)\quad \frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}\cdot\frac{z}{c} + \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)t^2 = 0.$$

Der Ort der konjugierten Punkte aller Punkte der Ebene (4) ist die Fläche 3. O. (5).

**4. Schnitte der Fläche 3. O. mit den Koordinatenebenen.** Wie aus Gleichung (5) hervorgeht, liegt die Fläche zu den drei Koordinatenebenen ganz symmetrisch. Das zeigt sich auch bei den Schnitten, die für die drei Ebenen bezüglich sind:

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 0$$

$$\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)t^2 = 0 \quad \left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)t^2 = 0 \quad \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)t^2 = 0.$$

Jede dieser drei Kurven 3. O. zerfällt in drei Geraden. Nach Staude III, § 20 (31) sind die Geraden

$$(6)\quad \left\{\begin{matrix} x = 0 \\ \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c} = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} y = 0 \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c} = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} z = 0 \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} = 0 \end{matrix}\right\}$$

die drei Scheiteldurchmesser der kubischen Hyperbel, oder die Schnitte der Hauptebene

$$\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}\cdot\frac{z}{c} = 0$$

mit den Koordinatenebenen.

Jede Koordinatenebene schneidet die Fläche 3. O. (5) in einem Scheiteldurchmesser und der zweifachen unendlich fernen Geraden.

**5. Geraden auf der Fläche 3. O.** Auf der Fläche 3. O. liegen, wie sich aus ihrer Gleichung ergibt, die Geraden:

$$\left|\begin{array}{c} x = o \\ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = o \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} y = o \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = o \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} z = o \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = o \end{array}\right|$$

$$\{ x = o,\ t = o \} \quad \{ y = o,\ t = o \} \quad \{ z = o,\ t = o \}$$

das sind die drei Scheiteldurchmesser (siehe (6)), und die drei Sehnen der kubischen Hyperbel, die in der Ebene $t = o$ liegen.

Auf der Fläche liegen ferner die drei Geraden, die die konjugierten Punkte der Punkte der Schnittgeraden der Ebene $t = o$ mit den Schmiegungsebenen in den Schnittpunkten von $t = o$ mit der kubischen Hyperbel enthalten. Diese drei Schnittpunkte haben die Parameter

$$\lambda_1 = \infty\,,\ \lambda_2 = 1.\ \lambda_3 = -1.$$

Die Schmiegungsebenen haben also die Gleichungen:

$$(7) \quad \left|\begin{array}{l} \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + 2t = o \\ \frac{z}{c} - \frac{x}{a} + 2t = o \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 2t = o \end{array}\right.$$

Ihre Schnittgeraden mit der Ebene (4) sind bezüglich

$$(8) \quad \left|\begin{array}{c} t = o \\ \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} t = o \\ \frac{z}{c} = \frac{x}{a} \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} t = o \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \end{array}\right|$$

Diese Geraden sind aber Transversalen der kubischen Hyperbel in der Ebene $t = o$, und haben als polares Element einen Kegelschnitt und die Tangente mit der kubischen Hyperbel. Diese drei Tangenten sind

$$(9) \quad \left|\begin{array}{c} \frac{y}{b} + t = o \\ \frac{z}{c} - t = o \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} \frac{z}{c} + t = o \\ \frac{x}{a} - t = o \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} \frac{x}{a} + t = o \\ \frac{y}{b} - t = o \end{array}\right|$$

Alle drei befriedigen die Gleichung (5).

Auf der Fläche 3. O. liegen die Tangenten der kubischen Hyperbel in ihren drei Schnittpunkten mit der Ebene $t = o$.

Diese drei Tangenten (9) sind, weil $t = o$ die unendlich ferne Ebene ist, die drei Asymptoten der kubischen Hyperbel.

**6. Schnitt der Diagonalebenen mit der Fläche 3. O.** Die Gleichungen der drei Diametralebenen, die je eine Asymptote mit der gleichnamigen Mittelpunktsachse verbinden (Staude, III, S. 20,5) sind:

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = o, \qquad \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = o, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = o.$$

Die Ebenen schneiden die Fläche 3. O. in bezgl.:

$$\frac{x}{a} \cdot \left\{ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + t \right\} = o, \quad \frac{y}{b} \left\{ \frac{z}{c} - \frac{x}{a} + t^2 \right\} = o, \quad \frac{z}{c} \left\{ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + t^2 \right\} = o$$

also in den bereits gefundenen Scheiteldurchmessern (6) und den Geraden:

$$\left| \frac{y}{b} - t = o \right| \quad \left| \frac{z}{c} - t = o \right| \quad \left| \frac{x}{a} - t = o \right|$$
$$\left| \frac{z}{c} - t = o \right|' \quad \left| \frac{x}{a} - t = o \right|' \quad \left| \frac{y}{b} - t = o \right|$$

und

$$(10) \quad \left| \frac{x}{a} - t = o \right| \quad \left| \frac{z}{c} - t = o \right| \quad \left| \frac{x}{a} - t = o \right|$$
$$\left| \frac{z}{c} + t = o \right|' \quad \left| \frac{x}{a} + t = o \right|' \quad \left| \frac{y}{b} + t = o \right|$$

also den ebenfalls schon bekannten Asymptoten (9) und den drei Mittelpunktsachsen (10) der kubischen Hyperbel.

**7. Verteilung der Geraden auf der Fläche 3. O.** Die sechs Asymptotenebenen der kubischen Hyperbel sind:

$y = b$, $z = -c$; $z = c$, $x = -a$; $x = a$, $y = -b$.

Die Ebene $y = b\,t$ schneidet die Fläche 3. O. in

$$\left\{ \frac{x\,z}{a\,c} + \frac{x}{a} t + \frac{z}{c} t + t^2 \right\} = o$$

also der Sehne: $\{ y = o,\ t = o \}$

der Asymptote: $\left\{ \frac{y}{b} - t = o,\ \frac{x}{a} + t = o \right\}$

und der Mittelpunktsachse: $\left\{ \frac{y}{b} - t = o,\ \frac{z}{c} + t = o \right\}$

So liegen je eine Mittelpunktsachse, eine Asymptote und eine Sehne auf einer Asymptotenebene,

ein Scheiteldurchmesser und eine zweifache Sehne auf einer Koordinatenebene, die somit Tangentialebene ist,

eine Asymptote, eine Mittelpunktsaxe und ein Scheiteldurchmesser auf einer Diametralebene,

drei Sehnen in der Ebene $t = 0$.

**8. Doppelpunkte der Fläche 3. O.** Die Doppelpunkte entsprechen den Werten der Koordinaten in den Gleichungen:

$$yz + bct^2 = 0$$
$$zx + cat^2 = 0$$
$$xy + abt^2 = 0,$$

sind also die Punkte:

$$(11)\quad y = 0,\ z = 0,\ t = 0$$
$$z = 0,\ x = 0,\ t = 0$$
$$x = 0,\ y = 0,\ t = 0,$$

d. h. die drei unendlich fernen Punkte der Koordinatenaxen, die den Parametern

$$\lambda = \infty,\ \lambda = 1,\ \lambda = -1$$

der kubischen Hyperbel entsprechen.

**9. Tangentialkegel in den Doppelpunkten.** Ist

$$F = 0$$

die Gleichung (5) der Fläche 3. O., so hat der Tangentialkegel im Punkte $P^0\,(x_0\ y_0\ z_0\ t_0)$ die Gleichung:

$$F_{11}^0\,(x - x_0)^2 + F_{22}^0\,(y - y_0)^2 + F_{33}^0\,(z - z_0)^2 + F_{44}^0\,(t - t_0)^2$$
$$+ 2F_{23}^0(y - y_0)(z - z_0) + 2F_{31}^0(z - z_0)(x - x_0) + 2F_{12}^0(x - x_0)(y - y_0)$$
$$2F_{14}^0(x - x_0)(t - t_0) - 2F_{24}^0(y - y_0)(t - t_0) - 2F_{34}^0(z - z_0)(t - t_0) = 0$$

Die Tangentialkegel in den 3 Punkten (11) der kubischen Fläche sind also mit

$$yz = -bc,\ zx = -ac,\ xy = -ab$$

die Asymptotenebenenpaare der hyperbolischen Zylinder (1).

**10. Tangentenfläche von einem Punkt an die Fläche 3. O.** Eine Gerade $g = P_1 P_2$ mit dem laufenden Punkt

$$P = P_1 + \tau P_2$$

schneidet die Fläche in drei Punkten, deren Parameter $\tau$ die Wurzeln der Gleichung sind:

$$F_1^3 + \tau\left\{\frac{x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1}{abc} + 2t_1 t_2\left\{\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} + \frac{z_1}{c}\right\}\right\}$$
$$+ \tau^2\left\{\frac{x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1}{abc} + 2t_1 t_2\left(\frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{b} + \frac{z_2}{c}\right)\right\}$$
$$+ F_2^3 \tau^3 = 0$$

Der Punkt $P_2$ sei einer der Punkte auf der Fläche. Dann bleibt, weil

$$F_2^3 = 0$$

ist, die quadratische Gleichung:

$$(12)\quad \tau^2 \left| \frac{x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1}{abc} + 2t_1 t_2 \left(\frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{b} + \frac{z_2}{c}\right) \right|$$

$$+ \tau \left| \frac{x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_2}{abc} + 2t_1 t_2 \left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} + \frac{z_1}{c}\right) \right| + F_1^3 = 0$$

Die Bedingung für das Zusammenfallen der Wurzeln

$$\tau_1 = \tau_2$$

ist gleichzeitig die Gleichung der Tangentenfläche von dem Punkt $P_2$ an die Fläche:

$$\left| \frac{x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1}{abc} + 2t_1 t_2 \left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} + \frac{z_1}{c}\right) \right|^2$$

$$- 4 F_1^3 \left| \frac{x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1}{abc} + 2t_1 t_2 \left(\frac{x_2}{a} + \frac{y_2}{c} + \frac{z_2}{c}\right) \right| = 0$$

in laufenden Koordinaten $x_1\ y_1\ z_1\ t_1$.

Die Tangentenfläche von einem Punkte der Fläche 3. O. an dieselbe ist ein Kegel 4. O.

Diese Fläche kann entarten. Liegt z. B. $P_2$ im Koordinatenanfangspunkt, dann ist die Gleichung des Tangentenkegels:

$$t^2 \left| \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right|^2 = 0.$$

Er besteht in diesem Falle aus der unendlich fernen Doppelebene und der doppelten Hauptebene.

Ist $P_2$ ein Scheitel der kubischen Hyperbel:

$$x_2 = 0,\ y_2 = -3b,\ z_2 = -3c$$

so wird:

$$\left| 3\frac{x}{a}\left(\frac{z}{c} - \frac{y}{b}\right) + 2t\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \right|^2 + 36\,\frac{x}{a} F_1^3 = 0.$$

Die Gleichung ist erfüllt für

$$x = 0,\ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$$

und zwar ist, weil für $x = 0$ mit $t = 1$ übrig bleibt:

$$\left\{\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right\}^2 = 0$$

dieser Scheiteldurchmesser ein Doppelstrahl des Kegels.

Die Sehne:

$$x = 0,\ t = 0$$

erfüllt die Gleichung ebenfalls, geht aber nicht durch den Doppelpunkt des Kegels.

**11. Polare eines Punktes bezüglich der Fläche 3. O.** Setzt man in Gleichung (12) den Koëffizienten des linearen Gliedes gleich Null, so ist das die Bedingung, dass der Punkt $P_1$ harmonisch liegt zu $P_2$ und den beiden anderen Schnittpunkten einer Geraden durch $P_2$ mit der Fläche 3. O., und gleichzeitig die Gleichung des Ortes dieser Punkte $P_1$ oder der Polaren des Punktes $P_2$:

$$\frac{x\,y\,z_2 + x\,y_2\,z + x_2\,y\,z}{abc} + 2t\,t_2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0;$$

das ist die Gleichung einer Fläche 2. O.

Da für den Koordinatenanfangspunkt die Polarfläche 2. O.

$$(13)\quad t\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0$$

ist, kann man sagen:

Die Polarfläche 2. O. des Mittelpunktes der kubischen Hyperbel in bezug auf die der unendlich fernen Ebene konjugierten Fläche 3. O. ist das Ebenenpaar (13), also die Ebene selbst und die Hauptebene der kubischen Hyperbel.

# Literatur.


Cardinaal, Ein spezieller $F^2$-Bündel etc. (Journal für Mathematik 101)

Cayley, On the rational transformation between two spaces (Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. III [1869—71]).

Chasles, Aperçu historique des méthodes en géometrie 1837.

Chasles, Sur la surface et sur la courbe à double courbure, lieux des sommets des cônes du second ordre, qui divisent harmoniquement six ou sept segments etc. (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences tom. 52, Paris 1861) citiert als C. R. t. 52.

Chasles, Propriétés des courbes à double courbure du troisième ordre. (Comptes rendus etc. 1857, II.).

Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie des Raumes 1891.

Cremona, Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre. (Journal für Mathematik Band 68 [1868]).

Cremona, Sulle trasformazioni razionali nello spazio (Annali di Matematica ser. II tom. V).

Cremona, Sulle linee del terzo ordine a doppia curvatura, (Annali di Matem. ser. I tom. I 1858).

Drach, Kubische Kegelschnitte 1867.

Geiser, Zur Theorie der Flächen 2. und 3. Grades (Journal für Mathematik 69 [1868]).

Geiser, Einige geometrische Betrachtungen (Vierteljahrsschrift der Züricher naturforschenden Gesellschaft Zürich 1865).

Hesse, Geometrie des Raumes.

Hesse, Ueber die Doppeltangenten der Kurven 4. Ordnung (Journ. für Mathematik 49 [1853] — Werke S. 345).

Hierholzer, Ueber Kegelschnitte im Raume (Mathematische Annalen 2 [1870]).

Lamé, Examen des différentes méthodes etc. 1818.

Nöther, Ueber die eindeutigen Raumtransformationen (Mathematische Annalen 3 [1871]).

Plücker, Recherches sur les surfaces algébriques de tous les degrés. (Annales des mathématiques par J. D. Gergonne, tom [1828]. Gesammelte Abhandlungen S. 83).

Reye, Geometrie der Lage. 4. Aufl. 1910.

Reye, Kenntnis der Raumkurven 3. Ordnung (Festschrift der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg 1890).

Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes I. 1898.

Salmon, On the triple tangent planes to a surface of the third order. (Cambridge and Dublin Math. Journal IV [1849]).

Salmon, On the classification of curves of double curvature (Cambr. and Dubl. Math. Journ. V [1850]).

Schröter, Theorie der Oberflächen 2. Ordnung und der Raumkurven 3. Ordnung. 1880.

Staude, Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven (Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften Band III, 2, Heft 2).

Staude, Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene (citiert als „Staude I).

Staude, Analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche 2. Ordnung (citiert als „Staude II").

Staude, Analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitte (citiert als „Staude III").

Steiner, Ueber die Flächen 3. Grades (Journal für Mathemathik 53 [1856] = Werke II S. 651).

Steiner, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander (Werke I S. 229).

Sturm, Ueber das Flächennetz 2. Ordnung (Journ. für Math. 70 [1869]).

Sturm, Ueber die reziproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften (Mathematische Annalen 19 [1882]).

Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung 1867.

Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften 1909.

# Inhaltsübersicht.


Einleitung . . . . . 5

**Abschnitt I: Polarentheorie des allgemeinen Flächenbündels 2. O.** . . . . . 7

1. Das allgemeine Flächenbündel . . . . . 7
2. Die Polarebenen eines Punktes . . . . . 7
3. Konjugierte Punkte . . . . . 8
4. Involutorische Eigenschaft konjugierter Punkte . . . . . 9
5. Konjugierte Punkte der Punkte einer Geraden . . . . . 9
6. Reziproke Polaren einer Geraden . . . . . 9
7. Konjugierte Punkte der Punkte einer Ebene . . . . . 10
8. Ort der Pole einer Ebene . . . . . 10
9. Sich selbst konjugierte Punkte . . . . . 11
10. Verbindungslinie von zwei konjugierten Punkten. . . . . 11
11. Der Komplex der Erzeugenden . . . . . 12
12. Andere Bedeutung des Komplexes . . . . . 13
13. Umwandlung der Komplexgleichung . . . . . 13
14. Unabhängigkeit der Gleichung des Komplexes . . . . . 14
15. Übersicht der Determinanten der Matrix . . . . . 15
16. Einteilung der Glieder der Komplexgleichung . . . . . 16
17. Die Komplexgleichung in Strahlenkoordinaten . . . . . 18
18. Ort der Punkte mit konjugierten Geraden . . . . . 19
19. Die Kernkurve als Ort der Kegelspitzen . . . . . 20
20. Die Ordnung der Kernkurve . . . . . 20
21. Die Kernkurve als Ort der Berührung zweier Flächen . . . . 21
22. Die Kernkurve und die kubische Polfläche . . . . . 22
23. Die kubische Verwandtschaft . . . . . 22
24. Polarebenen eines Punktes in bezug auf ein Büschel . . . . 23
25. Ort der konjugierten Geraden der Punkte einer Geraden . . . 23
26. Ort der reziproken Polaren der Geraden bezüglich eines Büschels 24
27. Das Bündel der Polarhyperboloide einer Geraden . . . . . 24
28. Kegel im Bündel der Polarhyperboloide . . . . . 26
29. Pole einer Ebene in bezug auf ein Büschel . . . . . 26
30. Konjugierte Geraden der Punkte einer Ebene . . . . . 27
31. Die Polfläche 3. O. der Ebene als Erzeugnis kubischer Polkurven der Ebene . . . . . 27
32. Die Polfläche 3. O. als Erzeugnis kubischer Polkurven der Geraden in der Ebene . . . . . 28
33. Ebenenbüschel und Flächenbüschel . . . . . 28
34. Ebenenbüschel und Flächenbündel . . . . . 28

**Abschnitt II.: Polarentheorie des Flächenbündels 2. O. der Raumkurve 3. O.** . . . . . 29
1. Das Flächenbündel der Raumkurve 3. O. . . . . 29
2. Die Polarenebenen eines Punktes . . . . . 30
3. Der Schnittpunkt der Polarebenen . . . . . 30
4. Ort der konjugierten Punkte der Punkte einer Ebene . . . . 31
5. Geraden auf der Fläche 3. O. . . . . 32
6. Doppelpunkte der Fläche 3. O . . . . . 33
7. Doppelpunkte auf der kubischen Polfläche einer Schmiegungsebene 34
8. Ort der konjugierten Punkte der Punkte einer Geraden . . . 34
9. Die Gerade als Transversale . . . . . 35
10. Die Gerade als Sehne . . . . . 36
11. Die Gerade als Tangente . . . . . 37
12. Ort der Punkte mit konjugierten Geraden . . . . . 37
13. Die Erzeugenden der Bündelflächen . . . . . 37
14. Die Gleichung des Komplexes 3. O. . . . . 38
15. Die Komplexgleichung im Schmiegungstetraeder . . . . . 39
16. Übergang vom Haupttetraeder zum Schmiegungstetraeder . . 39
17. Die Tangentenfläche der kubischen Grundkurve . . . . . 40
18. Die Doppelpyramidengruppe . . . . . 40
19. Die kubische Verwandtschaft . . . . . 41
20. Die Polfläche 6. O. einer Bündelfläche . . . . . 42
21. Die Polfläche 9. O. der kubischen Polfläche einer Ebene . . . 42
22. Büschel im Bündel der Raumkurve . . . . . 43
23. Polarebenen eines Punktes bezüglich eines Büschels . . . . 43
24. Ort der reziproken Polaren einer Geraden bezüglich des Büschels 44
25. Ort der konjugierten Geraden der Punkte einer Geraden . . . 46
26. Das Bündel der Polarhyperboloide einer Geraden . . . . . 46
27. Ort der reziproken Polaren der Geraden bezüglich des Bündels der Raumkurve . . . . . 46
28. Polarhyperboloide einer Transversalen . . . . . 47
29. Reziproke Polaren der Transversalen . . . . . 48
30. Reziproke Polaren durch den Doppelpunkt . . . . . 49
31. Das Polarflächenbündel der Transversalen . . . . . 50
32. Kubische Polkurve einer Sehne . . . . . 51
33. Reziproke Polaren der Sehne . . . . . 51
34. Polarflächenbündel der Sehne . . . . . 52
35. Polarhyperboloide einer Tangente . . . . . 53
36. Reziproke Polaren der Tangente . . . . . 54
37. Polarflächenbündel der Tangente . . . . . 54
38. Polarhyperboloide eines Schmiegungsstrahles . . . . . 54
39. Reziproke Polaren des Schmiegungsstrahles . . . . . 56
40. Polarflächenbündel des Schmiegungsstrahles . . . . . 56
41. Kubische Polfläche einer Schmiegungsebene . . . . . 57
42. Kubische Polkurve einer Ebene in bezug auf ein Büschel . . 58
43. Kubische Polfläche als Erzeugnis kub. Polkurven . . . . . 59
44. Kubische Polkurven einer Schmiegungsebene . . . . . 59

**Abschnitt III.: Polarentheorie des Flächenbündels 2. O. der kubischen Hyperbel** . . . . . 60
1. Die kubische Hyperbel . . . . . 60
2. Konjugierte Punkte . . . . . 60
3. Ort der konjugierten Punkte der Punkte einer Ebene . . . . 61
4. Schnitt der Fläche 3. O mit den Koordinatenebenen . . . . 61
5. Geraden auf der Fläche 3. O. . . . . 62
6. Schnitt der Diagonalebenen mit der Fläche . . . . . 63
7. Verteilung der Geraden auf der Fläche . . . . . 63
8. Doppelpunkte der Fläche . . . . . 64
9. Tangentialkegel in den Doppelpunkten . . . . . 64
10. Tangentenfläche von einem Punkte an die Fläche 3. O. . . . 64
11. Polare eines Punktes bezüglich der Fläche 3. O. . . . . 66

# Lebenslauf.

Ich, Wolfgang Otto Rudolf Baier, Sohn des Justizrats Clemens Baier, bin am 5. Oktober 1889 zu Stralsund geboren. Von Ostern 1899 ab besuchte ich das Gymnasium meiner Vaterstadt, kam Michaelis 1903 auf das Matthias-Claudius-Gymnasium zu Wandsbek und erhielt dort Ostern 1908 das Reifezeugnis. Ich studierte dann je zwei Semester an den Universitäten Jena, München, Berlin, Greifswald und Rostock Mathematik, Chemie nebst Mineralogie und Geologie und Physik und bestand in Rostock im Juni 1913 das Staatsexamen für das Lehramt an höheren Schulen. Am 2. März 1914 bestand ich das Rigorosum.

Es sei mir gestattet an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer Herrn Geheimrat Professor Dr. Staude, der mir zu der vorliegenden Arbeit Anregung und Unterstützung hat zu teil werden lassen, meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.